

**בחינה בקורס "מושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית" (80598)**  
**מבחן לדוגמה**

המורה: ד"ר יעקב ורשבסקי

משך הבחינה: שלוש שעות

ענו על ארבע (4) מתוך שש (6) השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. א. הגדירו "חוג ארטיני", "חוג פשוט למחצה", "רדיקל Jacobson של חוג".  
ב. הוכיחו כי חוג  $R$  הוא פשוט למחצה אם ורק אם  $R$  ארטיני ו-  $J(R) = 0$ .
2. נסחו והוכיחו את משפט Skolem – Noether.
3. תהי  $R$  אלגברה מעל שדה  $k$ , ממימד  $n$ . הראו כי התנאים הבאים הם שקולים:  
א.  $R$  פשוטה מרכזית מעל  $k$ .  
ב.  $n$  הוא ריבוע שלם ו-  $Mat_{\sqrt{n}}(\bar{k}) \cong R \otimes_k \bar{k}$ .  
ג.  $R \otimes_k R^{op} \cong Mat_n(k)$ .
4. יהיו  $D_1$  ו-  $D_2$  אלגבראות עם חילוק ממימד סופי מעל שדה  $k$  כך ש-  $(\dim_k D_1, \dim_k D_2) = 1$ .  
הראו כי  $D_1 \otimes_k D_2$  היא אלגברה עם חילוק.  
**רמז:** הראו זאת ראשית כאשר  $D_1$  ו-  $D_2$  הן מרכזיות.
5. א. הראו כי מודול  $M$  הוא נתרי אם ורק אם כל תת-מודול  $N \subseteq M$  הוא נוצר סופית.  
ב. הראו כי מודול  $M$  מעל חוג ארטיני הוא בעל אורך סופי אם ורק אם הוא נוצר סופית.
6. תהי  $\rho: G \rightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V)$  הצגה אי-פריקה של חבורה סופית  $G$ .  
א. הוכיחו כי  $\dim V \mid [G: Z(G)]$ . **רמז:** התבוננו בהצגה  $\rho^{\otimes n}: G^n \rightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ .  
ב. הראו כי  $(\dim V)^2 \leq [G: Z(G)]$ .

**בהצלחה!**