4.11.2004

תרגיל מס׳ 3 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי F שדה ונתבונן בחוג המטריצות המשולשיות העליונות $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c\in F\right\}$. יהי $M=F^2$. אזי R פועל על M ע״י $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cy \end{pmatrix}$.

   א. בדקו כי R הוא חוג וכי M עם הפעולה הנ״ל הוא R-מודול שמאלי.

   ב. תארו את כל תת המודולים של M.

   ג. האם M פשוט? פשוט למחצה?

   ד. חשבו את החוג $End_R M$.

2. יהי R חוג, M מודול מעליו ויהי $S=End_R M$.

   א. נאמר ש- M <u>אי-פריק</u> (indecomposable) אם לא ניתן לכתוב $M=N\oplus N'$ כאשר N,N' תת-מודולים שונים מ- 0. הראו כי M אי-פריק אם ורק אם אין בחוג S אידמפוטנטים שונים מ- 0,1 (אידמפוטנט בחוג הוא איבר e המקיים $e^2=e$).

   ב. הראו כי בתחום שלמות קומוטטיבי אין אידמפוטנטים שונים מ- 0, 1.

   ג. הראו כי חוג הוא מודול פשוט מעל עצמו אם ורק אם הוא חוג עם חילוק.

   ד. הסיקו כי תחום שלמות קומוטטיבי שאינו שדה איננו פשוט למחצה.

3. מצאו דוגמאות עבור:

   א. חוג פשוט למחצה שקיימים מעליו שני מודולים פשוטים לא איזומורפיים.

   ב. חוג שאינו פשוט למחצה כך שכל שני מודולים פשוטים מעליו הם איזומורפיים.

   ג. חוג ומכפלה ישרה של מודולים פשוטים מעליו שאיננה מודול פשוט למחצה.

4. יהי M מודול מעל R.

   א. נניח כי $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ו- $M=\bigoplus_{j=1}^{m} M'_j$ הם שני פירוקים של M לסכום ישר של מודולים פשוטים. הראו כי $n=m$ וכי קיימת תמורה π של $\{1,2,\ldots,n\}$ כך ש- $M_i\cong M'_{\pi(i)}$ לכל $1\le i\le n$.

   ב. נניח כי $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ פירוק של M לסכום ישר של מודולים פשוטים. לכל מודול פשוט N, נסמן $M_N=\bigoplus_{i:M_i\cong N} M_i$. הראו כי תת המודולים M_N אינם תלויים בבחירת הפירוק של M. תת-מודולים אלה קרויים <u>המרכיבים האיזוטיפיים</u> של M.

5. יהי F שדה ו- V מרחב וקטורי ממימד אינסופי מעליו.

   א. תארו את חוג האנדומורפיזמים $R=End_F V$ (כמטריצות אינסופיות בעלות תכונות מסוימות).

   ב. הראו כי V, כמודול מעל R, הוא פשוט (זה נכון לכל מ״ו מעל שדה).

   ג. הראו כי R איננו חוג פשוט.