30.12.2004

תרגיל מסי 11 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. תהי G חבורה סופית ויהיו $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ שתי הצגות ממימד סופי מעל שדה k . נתבונן במרחב הוקטורי $\hom_k(V_1,V_2)$ של טרנספורמציות ליניאריות מעל k .

   א. נגדיר לכל $g \in G$ ו- $T \in \hom_k(V_1,V_2)$: $\rho(g)(T) = \rho_2(g)T\rho_1(g)^{-1}$.

   הראו כי $\rho : G \to GL(\hom_k(V_1,V_2))$ היא הצגה. נסמן $\rho = \hom(\rho_1,\rho_2)$.

   ב. הראו כי תת-המרחב של טרנספורמציות ליניאריות ב- $\hom_k(V_1,V_2)$ שהן ρ-אינבריאנטיות שווה ל- $\hom_G(V_1,V_2)$ (הומומורפיזמים של הצגות).

   ג. הראו כי $V_1^\vee \otimes V_2 \cong \hom_k(V_1,V_2)$. הראו כי ההצגות $\hom(\rho_1,\rho_2)$ ו- $\rho_1^\vee \otimes \rho_2$ (ראו תרגיל קודם) הן שקולות.

2. תהי G חבורה סופית ו- N תת-חבורה נורמלית שלה.

   א. הראו כי כל הצגה $\pi : G/N \to GL(V)$ ניתן להרים להצגה $\tilde{\pi} : G \to G/N \xrightarrow{\pi} GL(V)$.

   ב. הראו כי $\tilde{\pi}$ אי פריקה אם ורק אם π אי פריקה.

   ג. הראו כי טבלת הקרקטרים של G/N היא תת-טבלה של טבלת הקרקטרים של G .

3. תהי G חבורה סופית, $\rho : G \to GL(V)$ הצגה ממימד סופי מעל המרוכבים, χ_ρ הקרקטר שלה. הוכיחו את הטענות הבאות:

   א. $|\chi_\rho(g)| \le \chi_\rho(1)$ לכל $g \in G$.

   ב. $\ker\rho = \{g \in G : \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)\}$.

   ג. אם $\rho = \sum m_i\rho_i$ פרוק כאשר $m_i > 0$ ו- ρ_i אי פריקות, אזי $\ker\rho = \bigcap \ker\rho_i$.

   ד. אם N ת"ח נורמלית של G, קיימות הצגות אי פריקות $\rho_{i_1},\dots\rho_{i_s}$ כך ש- $N = \bigcap_{j=1}^{s} \ker\rho_{i_j}$.

4. תהי G חבורה סופית, $\rho : G \to GL(V)$ הצגה אי פריקה ממימד סופי מעל המרוכבים, χ_ρ הקרקטר שלה.

   א. אם $z \in Z(G)$, אזי $\rho(z)$ מטריצה סקלרית.

   ב. יהי $g \in G$. אזי $\rho(g)$ מטריצה סקלרית אם ורק אם $|\chi_\rho(g)| = \chi_\rho(1)$.

הערה: בתרגיל הבא נשתמש בלמות של תרגיל זה כדי לבדוק אילו תכונות של חבורה סופית אפשר להסיק מתוך טבלת הקרקטרים שלה.