23.12.2004

# תרגיל מס׳ 10 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. תהי $\rho : G \to Aut(V)$ הצגה (ממימד סופי) של חבורה $G$. יהי $V^\vee$ המרחב הדואלי ל- $V$. נגדיר את ההצגה $\rho^\vee : G \to Aut(V^\vee)$ (contragredient) ע״י $\rho^\vee(g)(\varphi)(v) = \varphi(\rho(g^{-1})(v))$ לכל $g \in G$, $v \in V$ ו- $\varphi \in V^\vee$.

   הראו כי $\rho^\vee$ היא הצגה וכי אם $\chi_\rho$ הוא הקרקטר של $\rho$ אזי $\chi_{\rho^\vee}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$ לכל $g \in G$.

2. תהי $G$ חבורה סופית ויהיו $\rho : G \to GL(V)$, $\rho' : G \to GL(V')$ שתי הצגות (ממימד סופי).

   א. הראו כי יש הצגה יחידה $\rho \otimes \rho' : G \to GL(V \otimes V')$ המקיימת $(\rho \otimes \rho')(g) = \rho(g) \otimes \rho'(g)$ לכל $g \in G$.

   ב. הראו כי $\chi_{\rho\otimes\rho'}(g) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_{\rho'}(g)$ לכל $g \in G$.

3. יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה ממציין אפס.

   א. הראו כי קיימת העתקה ליניארית יחידה $\theta : V \otimes V \to V \otimes V$ עם $\theta(v \otimes v') = v' \otimes v$ לכל $v, v' \in V$.

   ב. הראו כי $V \otimes V$ מתפרק כ- $S^2V \oplus \Lambda^2 V$ כאשר

   $S^2V = \{w \in V \otimes V : \theta(w) = w\}$ (טנזורים סימטריים)

   $\Lambda^2 V = \{w \in V \otimes V : \theta(w) = -w\}$ (טנזורים אנטי-סימטריים).

   ג. חשבו את $\dim S^2 V$ ואת $\dim \Lambda^2 V$.

   ד. יהיו $G$ חבורה סופית, $\rho : G \to GL(V)$ הצגה. נתבונן בהצגה $\rho \otimes \rho : G \to GL(V \otimes V)$. הראו כי $S^2V$ ו- $\Lambda^2 V$ הם תת-מרחבים $G$-אינבריאנטיים, ולכן צמצום $\rho \otimes \rho$ אליהם מגדיר הצגות $S^2(\rho)$ ו- $\Lambda^2(\rho)$.

   ה. חשבו את הקרקטרים $\chi_{S^2(\rho)}, \chi_{\Lambda^2(\rho)}$ במונחי הקרקטר $\chi_\rho$.

4. תהי $G$ חבורה סופית הפועלת על קבוצה סופית $X$.

   א. הראו כי מוגדרת הצגה $\rho_X : G \to GL(V)$ כאשר $V$ הוא המרחב הוקטורי של פונקציות $f : X \to \mathbf{C}$, ע״י $\rho_X(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ (לכל $g \in G$, $f \in V$, $x \in X$).

   ב. נסמן ב- $\sigma$ את ההצגה הטריביאלית וב- $\chi_X$ את הקרקטר של $\rho_X$. הראו כי הריבוי של $\sigma$ ב- $\rho_X$ שווה למספר המסלולים של $G$ ב- $X$.

   ג. הראו כי לכל $g \in G$, $\chi_X(g) = \#\{x \in X : gx = x\}$ (כלומר שווה למספר נקודות השבת של $g$).

   ד. הסיקו משני הסעיפים הקודמים את הלמה של ברנסייד:

   $$\text{מספר המסלולים} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\#\{x \in X : gx = x\}.$$

   ה. נניח ש- $G$ פועלת על שתי קבוצות סופיות $X_1, X_2$. אזי $G$ פועלת על $X_1 \times X_2$ ע״י $g(x_1, x_2) = (gx_1, gx_2)$. הראו כי ההצגות המתאימות מקיימות $\rho_{X_1\times X_2} \cong \rho_{X_1} \otimes \rho_{X_2}$.

(המשך בעמוד הבא)

ו. הסיקו כי $\chi_{X\times X} = \chi_X^2$.

ז. תהי $|X|>1$. נאמר, כי $G$ פועלת בצורה <u>טרנזיטיבית כפולה</u> אם לכל $x,y,x',y'\in X$ עם $x\neq y$, $x'\neq y'$, קיים $g\in G$ כך ש- $gx=x'$ ו- $gy=y'$.

הראו כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

(i) $G$ פועלת בצורה טרנזיטיבית כפולה על $X$.

(ii) לפעולת $G$ על $X\times X$ (המושרית מפעולתה על $X$) יש בדיוק שני מסלולים; האחד הוא האלכסון $\{(x,x) : x\in X\}$ והשני הוא המשלים של האלכסון.

(iii) $\rho_X \cong \sigma \oplus \rho'$ כאשר $\rho'$ הצגה אי-פריקה לא טריביאלית של $G$.