Präsenzaufgaben

- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:
  a) Das neutrale Element ist eindeutig.
  b) Das zu einem Element x inverse Element x^{-1} ist eindeutig. Es gilt:
  $$\begin{aligned}(x^{-1})^{-1} &= x\\ (x \cdot y)^{-1} &= y^{-1} \cdot x^{-1}\end{aligned}$$
- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit 3 Elementen. Stellen Sie die Gruppentafel von $(G, \cdot)$ auf.
- Diskutieren Sie folgende Beispiele von Gruppen.
  a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
  b) Sei M eine Menge. Sei $\mathrm{Perm}(M)$ die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von M. Dann ist $(\mathrm{Perm}(M), \circ)$ eine Gruppe. Spezialfall: $M = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathrm{Perm}(M) = S_n$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen.
  c) Endliche Gruppen: symmetrische Gruppe S_n mit $|S_n| = n!$; Diedergruppe D_n mit $|D_n| = 2n$.
  d) Produkte von Gruppen sind Gruppen.
- Diskutieren Sie folgende Beispiele von Gruppenhomomorphismen.
  a) Der Logarithmus $\log : (\mathbb{R}_+^\times) \to \mathbb{R}$ ist ein Isomorphismus.
  b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann ist $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ die Gruppe der Automorphismen. Für $x \in G$ sei
  $$i_x : G \to G, \quad g \mapsto x \cdot g \cdot x^{-1}$$
  der Automorphismus, der durch Konjugation mit x gegeben ist. Dann ist $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $x \mapsto i_x$ ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild $i(G)$ wird die Gruppe der inneren Automorphismen von G genannt.
- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und sei $n \in \mathbb{Z}$. Diskutieren Sie, wann die Selbstabbildung
  $$(\text{-})^n : G \to G, \quad x \mapsto x^n$$
  ein Endomorphismus ist. Zeigen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn $(\text{-})^{-1}$ ein Endomorphismus ist.
- Sei $n \geq 1$. Geben Sie ein Erzeugendensystem der symmetrischen Gruppe S_n an.