Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

WS 2016/17

Algebra II

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei R der Ring der ganzen Zahlen von K. Bestimme die Primidealzerlegung der Hauptideale (2) und (3) in R. Beachte dafür, dass $3 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)^3$. Folgere, dass α und $\alpha + 1$ Primelemente von R sind.

Aufgabe 2:
Wie in Aufgabe 1 sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei R der Ring der ganzen Zahlen von K. Zeige in den folgenden Schritten, dass $R = \mathbb{Z}[\alpha]$.

a) Sei $z = a + b\alpha + c\alpha^2$ ein Element von R. Berechne die Spuren von z, αz und $\alpha^2 z$. Folgere, dass $6R \subset \mathbb{Z}[\alpha]$.

b) Wir wissen aus Aufgabe 1, dass α ein Primideal in R erzeugt. Zeige, dass α auch in $\mathbb{Z}[\alpha]$ prim ist, dass $\alpha\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\alpha] \cap \alpha R$ und dass $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha) = R/(\alpha)$.

c) In b) ersetze α durch $\alpha + 1$ und folgere, dass $R = \mathbb{Z}[\alpha] + 3R$.

d) Schließe aus a), b) und c), dass $R = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 3:
Berechne die Diskriminante $\Delta(\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Z})$.

Aufgabe 4:

a) Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige, dass $(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.

c) Eine ungerade Primzahl p lässt sich genau dann in der Form $x^2 + 2y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ darstellen, wenn $p \equiv 1, 3 \mod 8$.

Tipp zu a): Sei ζ eine primitive achte Einheitswurzel in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_p$. Sei $y = \zeta + \zeta^{-1}$. Dann gilt $y^2 = 2$. Betrachte nun y^p.

Abgabe: Montag, 14. November 2016.