Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

WS 2016/17

Algebra II

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 2:
Sei R ein Ring, der kein Körper ist. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
i) R ist ein diskreter Bewertungsring;
ii) R ist ein lokaler Hauptidealring;
iii) R ist ein noetherscher Integritätsring, und für alle Elemente x des Quotientenkörpers von R gilt $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$;
iv) R ist noethersch und lokal, und das maximale Ideal wird von einem nicht nilpotenten Element erzeugt.

Aufgabe 3:
Sei R ein Hauptidealring, und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass der R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ frei von endlichem Rang ist.

Aufgabe 4:
Sei R ein diskreter Bewertungsring, π ein Erzeugendes des maximalen Ideals und $v : R - \{0\} \to \mathbb{Z}$ die zugehörige Bewertung.
a) Sei A eine $n \times m$-Matrix mit Einträgen in R. Zeige, dass es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(R)$ gibt, so dass PAQ eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pi^{\mu_1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \pi^{\mu_r} & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\mu_i \in \mathbb{N}$ und $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_r$.

b) Sei nun $\Lambda \subseteq R^2$ ein Untermodul vom Rang 2, der erzeugt wird von den Vektoren $a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ und $a_{12}e_1 + a_{22}e_2$. (Hier sei e_1, e_2 die kanonische Basis von R^2, $a_{ij} \in R$.)

Zeige: Es gibt eine Basis f_1, f_2 von R^2, so dass Λ erzeugt wird von $\pi^{\mu_1} f_1$ und $\pi^{\mu_2} f_2$, wobei μ_1 und μ_2 bestimmt sind durch

$$\mu_1 = \inf\{v(a_{ij}); i, j = 1, 2\},$$
$$\mu_1 + \mu_2 = v(\det A).$$

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2016.