Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch

Sommersemester 2016

Musterlösung für die Klausur Algebra I

vom 21.07.2016

Aufgabe 1: (10)

Sei A ein Ring mit Nilradikal $\mathfrak{n} := \mathrm{Nil}(A)$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

i) A hat genau ein Primideal.

ii) Jedes Element in A ist entweder eine Einheit oder nilpotent.

iii) Der Restklassenring $A/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Lösung:

Wir zeigen mögliche Beweise aller Implikationen.

i) ⇒ ii) und iii) Falls A genau ein Primideal hat, so ist dieses maximal. Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} \mathfrak{p}. \tag{1}$$

Es folgt, dass $\mathfrak{n}$ selbst das eindeutige Primideal und insbesondere maximal ist. Daraus folgt iii). Jetzt verwenden wir, dass ein Element $a \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es in keinem maximalen Ideal enthalten ist. Also ist jedes nicht-nilpotente Element eine Einheit.

ii) ⇒ i Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset A$ zwei verschiedene Primideale und sei ohne Einschränkung $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$. Wir wählen $p \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Dann ist p weder eine Einheit (da ansonsten $\mathfrak{p} = A$), noch nilpotent (da ansonsten $p \in \mathfrak{q}$).

ii) ⇒ iii) Sei $0 \neq \bar{a} \in A/\mathfrak{n}$ mit Lift $a \in A$. Dann ist a nicht nilpotent nach Definition von $\mathfrak{n}$. Nach Annahme ist a eine Einheit. Also ist auch $\bar{a}$ eine Einheit.

iii) ⇒ i) Falls $A/\mathfrak{n}$ ein Körper ist, so ist $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal. Folglich ist $\mathfrak{n}$ das einzige Primideal wegen Formel (1). Es folgt i).

iii) ⇒ ii) Sei $a \in A$ nicht nilpotent, also $a \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$. Aus der Annahme folgt, dass es ein b mit $ab \equiv 1 \bmod \mathfrak{n}$ gibt. Mit anderen Worten,

$$ab = 1 + \varepsilon$$

mit einem $\varepsilon \in \mathfrak{n}$. Multiplikation mit der abbrechenden Reihe

$$1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots$$

zeigt, dass a eine Einheit ist.

Aufgabe 2: (10)

Sei A ein Ring und sei
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von A-Moduln. Außerdem seien K und N endlich erzeugt als A-Moduln. Zeige, dass dann auch M endlich erzeugt ist.

Lösung:

Seien $k_1, \ldots, k_r \in K$ Erzeuger von K und seien $n_1, \ldots, n_s \in N$ Erzeuger von N. Für $i = 1, \ldots, s$ wählen wir einen Lift $m_i \in M$ von n_i.

Behauptung: Die Elemente $k_1, \ldots, k_r, m_1, \ldots, m_s$ erzeugen M. Mit anderen Worten, jedes Element aus M ist eine Linearkombination der $k_1, \ldots, k_r, m_1, \ldots, m_s$.

Sei $m \in M$ beliebig mit Bild $n \in N$. Dann existieren $a_1, \ldots, a_s \in A$ mit
$$n = a_1 n_1 + \ldots + a_s n_s.$$
Folglich liegt $m - (a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_s m_s)$ im Kern K. Dann existieren $b_1, \ldots, b_r \in A$ mit
$$m - (a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_s m_s) = b_1 k_1 + \ldots + b_r k_r.$$
Umstellen der Gleichung ergibt
$$m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_s m_s + b_1 k_1 + \ldots + b_r k_r,$$
was zu zeigen war.

Aufgabe 3: $(2+3+2+3)$

Entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Begründe Deine Antwort (z.B. durch ein Gegenbeispiel).

i) Jeder freie Modul ist flach.

ii) Jeder flache Modul ist frei.

iii) $\mathbb{Q}$ ist ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul.

iv) Sei k ein Körper und sei $R = k[X]/(X^2)$. Dann ist k ein flacher R-Modul.

Lösung:

Aussage i) ist wahr. Sei A ein Ring und sei $\phi : M \longrightarrow N$ eine injektive Abbildung von A-Moduln. Die induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} M = M \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} A \right) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} N = N \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} A \right)$$

ist dann einfach ϕ in jeder Komponente. Insbesondere ist sie wieder injektiv.

Aussage ii) ist falsch. Zum Beispiel ist $k \times 0$ ein flacher Modul über $k \times k$, wobei k einen Körper bezeichne. Ein anderes Beispiel ist durch Lokalisierungen gegeben, welche immer flach, aber oft nicht frei sind. Zum Beispiel kann der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht frei sein, da $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = 0$ für jede Primzahl p.

Aussage iii) ist wahr, denn alle Lokalisierungen sind flach (siehe Vorlesung).

Aussage iv) ist falsch. Die R-Modulstruktur auf k ist durch die Identifizierung $k = R/(X)$ von k-Algebren gegeben. Mit anderen Worten, für $a + bX \in R$ und $s \in k$ ist

$$(a + bX)s = as.$$

Behauptung: Die Inklusion $(X) \subset R$ des von X erzeugten Ideals in R ist nach Anwendung von $\otimes_R k$ nicht mehr injektiv. Also ist k nicht flach als R-Modul.

Als R-Modul ist das Ideal (X) isomorph zu $k = R/(X)$. Folglich ist $(X) \otimes_R k \cong k$. Die induzierte Abbildung

$$(X) \otimes_R k \longrightarrow R \otimes_R k$$

ist dann die Nullabbildung, denn $X \otimes 1 \longmapsto X \otimes 1 = 1 \otimes X = 0$.

Aufgabe 4: $(2+4+4)$

Bestimme die Dimension der folgenden Ringe. Begründe Deine Antwort.
i) $\mathbb{Q}[X]/(f)$, wobei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein nichtkonstantes, irreduzibles Polynom sei;
ii) $\mathbb{Z}[X]/(f)$, wobei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein nichtkonstantes, normiertes Polynom sei;
iii) $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$.

Lösung:

Aufgabe i). $\mathbb{Q}[X]/(f)$ ist ein Körper. Folglich ist die Dimension 0.

Aufgabe ii). Da f nichtkonstant und normiert ist, ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]/(f)$ eine endliche Ringerweiterung. Es ist nämlich $\mathbb{Z}[X]/(f)$ als $\mathbb{Z}$-Algebra von der Variablen X erzeugt und diese erfüllt die Ganzheitsgleichung f. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist dann

$$1 = \dim \mathbb{Z} = \dim \mathbb{Z}[X]/(f).$$

Aufgabe iii). Der Ring $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$ ist eine Lokalisierung von $\mathbb{Q}[X]$, insbesondere

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[X, X^{-1}] \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[X].$$

Folglich ist die Dimension ≤ 1. Aber es gibt eine Kette von Primidealen der Länge 2, etwa $(0) \subset (X-1)$. Also ist die Dimension gleich 1.

Alternativ argumentiert man mit Aufgabe 3 von Blatt 9: Der Ring $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}[S, T]/(ST-1)$. Folglich ist die Dimension gleich $2 - 1 = 1$.

Aufgabe 5: $(2+8)$

Betrachte den Ring $R := \mathbb{Q}[X,Y]$, das maximale Ideal $\mathfrak{m} := (X,Y) \subset R$ und den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : R &\longrightarrow R \\ X &\longmapsto X + XY \\ Y &\longmapsto Y. \end{aligned}$$

i) Zeige, dass $\operatorname{Spec}(\phi)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, wobei $\operatorname{Spec}(\phi) : \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ die induzierte Abbildung bezeichne.

ii) Zeige, dass ϕ nach $\mathfrak{m}$-adischer Vervollständigung einen Isomorphismus $\widehat{\phi} : \widehat{R}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \widehat{R}_{\mathfrak{m}}$ induziert.

Lösung:

Aufgabe i). Zu zeigen ist $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Es gilt $\phi(X) = X + XY \in \mathfrak{m}$ und $\phi(Y) = Y \in \mathfrak{m}$. Folglich ist

$$\mathfrak{m} \subset \phi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset R.$$

Da $\mathfrak{m}$ maximal und $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein echtes Ideal ist, gilt $\mathfrak{m} = \phi^{-1}(\mathfrak{m})$.

Aufgabe ii). Die Vervollständigung $\widehat{R}_{\mathfrak{m}}$ kann mit $\mathbb{Q}[[X,Y]]$ identifiziert werden. Wir verwenden nun, dass $(1+Y) \in \mathbb{Q}[[Y]]$ eine Einheit ist. Explizit ist

$$(1+Y)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Y^i.$$

Man rechnet nun nach, dass das Inverse zu $\widehat{\phi}$ gegeben ist als

$$\begin{aligned} \psi : R &\longrightarrow R \\ X &\longmapsto (1+Y)^{-1}X \\ Y &\longmapsto Y. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: $(3+2+5)$

Bestimme den ganzen Abschluss der folgenden Ringe in der angegebenen Ringerweiterung. Begründe Deine Antwort.

i) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$;

ii) $k[X_1, \ldots, X_n] \subset k(X_1, \ldots, X_n)$, wobei k einen Körper bezeichne;

iii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]$.

Lösung:

Aufgabe i). Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ ist die quadratische Erweiterung mit Diskriminante 5 und $5 \equiv 1 \bmod (4)$. Nach dem Beispiel aus der Vorlesung ist der ganze Abschluss gleich

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Aufgabe ii). Der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist faktoriell und folglich ganzabgeschlossen nach einem Satz (Gaußsches Lemma) aus der Vorlesung.

Aufgabe iii). Der ganze Abschluss ist $\mathbb{Z}$. Sei nämlich $f \in \mathbb{Z}[X]$ von Grad $d \geq 1$. Für $n \geq 1$ und $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ ist dann

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0$$

ein Polynom von Grad nd, also insbesondere ungleich 0. Folglich erfüllt f keine Ganzheitsgleichung (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$).