Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

8. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{k}$. Zeige, dass eine algebraische Erweiterung K/k genau dann separabel ist, wenn $K \otimes_k \bar{k}$ ein reduzierter Ring ist.

Hinweis: Beweise dies zunächst für den Fall $K = k(\alpha)$. Verwende dafür die Präsentation $K \cong k[T]/(f)$, wobei f das Minimalpolynom von α über k ist.

Aufgabe 2:

Sei p eine Primzahl, und sei $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimme die Fundamentalmatrix der Bilinearform $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}$ bezüglich einer geeigneten Basis.

Aufgabe 3:

Sei k ein unendlicher Körper und sei $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ ein Polynom in n Variablen. Zeige dass $f = 0$, falls

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in k^n.$$

Aufgabe 4:

Sei k ein Körper, und sei A eine k-Algebra. Sei G eine endliche Gruppe, die auf A durch Automorphismen von k-Algebren operiert. Bezeichne mit $A^G = \{a \in A \mid ga = a, \ \forall\, g \in G\}$ die k-Algebra der invarianten Elemente. Zeige, dass A^G von endlichem Typ über k ist, falls A von endlichem Typ über k ist.

Tip: Sei $x_1, \dots, x_m$ ein Erzeugendensystem von A über k. Definiere Elemente $y_{i,j} \in A$ durch

$$\prod_{g \in G} (T + g(x_i)) \ = \ T^n + y_{i,1} T^{n-1} + \ldots + y_{i,n},$$

wobei $n = |G|$. Sei B die k-Unteralgebra von A, die durch $y_{i,j}$ erzeugt wird, für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Zeige, dass B von endlichem Typ über k ist, und dass A ein endlich erzeugter B-Modul ist.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 13. Juni 2016.