Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: (Gaußsches Lemma)

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Seien $f, g \in K[X]$ normierte Polynome. Zeige, dass $f, g \in A[X]$ falls $f \cdot g \in A[X]$. Stelle die Beziehung zum Gaußschen Lemma aus dem letzten Semester her.

Tip: Man zerlege f, g in $\bar{K}[X]$ in Linearfaktoren, wobei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K ist.

Aufgabe 2:

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein Primideal. Zeige, dass die Menge $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ endlich ist.

Hinweis: Benutze aus der Vorlesung, dass $A \subset B$ eine endliche Ringerweiterung ist.

Aufgabe 3:

Sei A ein Ring, und sei G eine endliche Gruppe, die auf A in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei $A^G = \{a \in A \mid ga = a,\ \forall g \in G\}$ der Unterring der G-invarianten Elemente. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A^G)$, und sei $P = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \cap A^G = \mathfrak{p}\}$. Zeige, dass G transitiv auf P operiert. Es darf verwendet werden, dass P endlich ist.

Hinweis: Behandle zunächst den Fall, dass $\mathfrak{p}$ maximal ist. Betrachte einen G-orbit $O \subset P$. Finde mit dem chinesischen Restsatz ein $f \in A$ sodass

$$f \in \mathfrak{q}\ \forall \mathfrak{q} \in O \quad \text{und} \quad f \notin \mathfrak{q}\ \forall \mathfrak{q} \notin O.$$

Betrachte dann $\prod_{g \in G} g(f) \in A^G$ und führe dies zum Widerspruch falls $O \neq P$. Führe den allgemeinen Fall auf diesen zurück.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$ ein Polynom sodass f und die Ableitung f' teilerfremd sind. Zeige, dass f dann nur einfache Nullstellen hat. Insbesondere haben alle Primfaktoren von f einfache Multiplizität sodass $K[X]/(f)$ ein Produkt von Körpern ist.

Sei nun K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Betrachte zu $a \in K$ das Polynom

$$f_a = X^p - X - a \in K[X].$$

Zeige, dass f_a entweder irreduzibel über K ist oder vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Im ersteren Fall ist f_a separabel über K.

Hinweis: Die Gruppe $\mathbb{Z}/p$ operiert auf dem Ring $K[X]/(f_a)$ durch $[i] \cdot X = X + i$.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 6. Juni 2016.