Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, dass die Lokalisierung $S^{-1}A$ bezüglich einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subset A$ wieder noethersch ist.

Aufgabe 2:

Sei A ein Ring, und seien M, N endlich erzeugte A-Moduln. Zeige, dass

$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A N) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N).$$

Tip: Zeige zunächst, dass $M \otimes_A N = 0$ bereits $M = 0$ oder $N = 0$ impliziert, falls A lokal ist.

Aufgabe 3:

Sei A ein Ring, und sei G eine endliche Gruppe, die auf A in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei $A^G = \{a \in A \mid ga = a, \; \forall g \in G\}$ der Unterring der G-invarianten Elemente.

i) Zeige, dass A ganz über A^G ist.

ii) Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $g \cdot S \subset S$ für alle $g \in G$. Sei $S^G = S \cap A^G$. Zeige, dass die Operation von G eine Operation auf $S^{-1}A$ liefert, und dass gilt

$$(S^G)^{-1}A^G \simeq (S^{-1}A)^G.$$

Aufgabe 4:

Ein Homomorphismus von Ringen $f : A \to B$ heißt *ganz*, falls die Erweiterung $f(A) \subset B$ ganz ist.

i) Sei $f : A \to B$ ein ganzer Homomorphismus von Ringen. Zeige, dass die induzierte Abbildung $f^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ abgeschlossen ist, d.h. ist $Y \subset \operatorname{Spec}(B)$ eine abgeschlossene Menge, so ist $f^*(Y)$ abgeschlossen in $\operatorname{Spec}(A)$.

ii) Sei A ein Ring, und sei $f : B \to B'$ ein ganzer Homomorphismus von A-Algebren. Zeige, dass für eine beliebige A-Algebra C der Homomorphismus $f \otimes_A C : B \otimes_A C \to B' \otimes_A C$ ganz ist.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 23. Mai 2016.