Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2016**
A. Mihatsch

Algebra I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei R ein Ring, und sei $\varphi : R^n \to R^m$ ein Homomorphismus von freien R-Moduln. Beweise oder widerlege folgende Aussagen.

i) Falls φ ein Isomorphismus ist, so gilt $n = m$.

ii) Falls φ surjektiv ist, so gilt $n \geq m$.

Tip: Reduziere auf den Fall eines Körpers.

Aufgabe 2:
Sei R ein Ring und seien M, N Untermoduln eines R-Moduls L. Zeige: Sind $M + N$ und $M \cap N$ beides endlich erzeugte R-Moduln, so auch M und N.

Aufgabe 3:
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, sodass der induzierte Homomorphismus

$$\bar{\varphi} : M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N$$

injektiv ist. Ferner sei M endlich erzeugt und N projektiv. Zeige, dass M frei ist und φ einen Retrakt besitzt, d.h. es existiert ein Homomorphismus $\psi : N \to M$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$.
Tip: Betrachte zunächst einen Retrakt zu $\bar{\varphi}$ und konstruiere dazu einen Lift $\psi' : N \to M$. Zeige anschließend, dass $\psi' \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4:
Sei R ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ Ideale. Zeige folgende Aussagen:

a) $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

(Erinnerung: $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in R \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\} = \cap_{\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}} \mathfrak{p}$.)

b) Die zum Ringhomomorphismus $f : R \to R/\mathfrak{a}$ gehörende Abbildung

$$f^* : \mathrm{Spec}(\mathrm{R}/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$$

ist eine injektive, abgeschlossene Abbildung mit Bild $V(\mathfrak{a})$.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 25. April 2016.