Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I
12. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper, und sei $f \in k[X,Y]$ ein Polynom, das als Polynom in Y normiert ist. Sei $a \in k$ eine einfache Nullstelle von $f(0,Y)$. Zeige, dass eine Potenzreihe $h \in k[\![X]\!]$ existiert, mit $f(X, h(X)) = 0$ und $h(0) = a$.
Tip: Hensels Lemma.

Aufgabe 2:

Sei p eine Primzahl. Zeige mit dem Henselschen Lemma, dass der Ring der p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthält.
Zur Erinnerung: Der Ring der p-adischen ganzen Zahlen entsteht aus $\mathbb{Z}$ durch Vervollständigung am Primideal (p). Er ist ein Integritätsbereich.

Aufgabe 3:

Sei A ein semilokaler Ring, d.h. A besitzt nur endlich viele Maximalideale. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ die Maximalideale von A, und sei $\mathfrak{a}$ das Jacobsonradikal. Sei $\hat{A}$ die Komplettierung von A bezüglich $\mathfrak{a}$, und sei $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ die Komplettierung von $A_{\mathfrak{m}_i}$ bezüglich $\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$. Zeige, dass

$$\hat{A} \simeq \prod_{i=1}^{k} \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}.$$

Tip: Der Ring $\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ ist isomorph zur Komplettierung von A bezüglich $\mathfrak{m}_i$.

Aufgabe 4:

Ein Ring A heißt *artinsch*, falls jede absteigende Kette von Idealen $A \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$ stationär wird. (Das heißt für $n >> 0$ gilt $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1}$.)
Sei nun $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring mit Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$. Zeige folgende Aussagen.
i) Die Quotienten $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ sind endlich-dimensionale k-Vektorräume.
ii) Der Ring A ist genau dann artinsch, wenn $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal in A ist.
Tip: Sei $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal in A und sei $A \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$ eine Kette von Idealen. Zeige induktiv über i, dass die Ketten

$$\mathfrak{m}^i + \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{m}^i + \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$$

stationär werden. Verwende dafür Teil i) der Aufgabe. Zeige dann, dass $\mathfrak{m}^n = (0)$ für $n >> 0$.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 11. Juli 2016.