Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. T. Richarz

Wintersemester 2013/14

Nachklausur zur Vorlesung
Algebra II
05.04.2014

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
erreichbare Punkte	20	20	20	20	20	100
erreichte Punkte						

Note:

Aufgabe 1: $(4+4+4+4+4)$

Entscheide, welche der folgenden Ringe Dedekindringe sind (mit Begründung).

i) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$

ii) $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$

iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

iv) $\mathbb{Z}[X]$

v) Der ganze Abschluss $\bar{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ in $\bar{\mathbb{Q}}$, wobei $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ der Körper der algebraischen Zahlen ist.

Aufgabe 2: $(10 + 10)$

Sei $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ quadratfrei und sei $p \geq 3$ eine Primzahl mit $(p,d) = 1$. Sei $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Das Ideal $p\mathcal{O}$ zerfällt in zwei verschiedene Primideale in $\mathcal{O}$.

ii) Die Gleichung $x^2 \equiv d \pmod{p}$ ist lösbar.

Aufgabe 3: $(5+5+5+5)$

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

i) Man bestimme die absolute Diskriminante d_K von K.

ii) Man bestimme den Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

iii) Man bestimme die Minkowski-Konstante $M = (\frac{4}{\pi})^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|d_K|}$.

iv) Man bestimme die Klassengruppe $\mathfrak{cl}_K$.

Aufgabe 4: $(10 + 10)$

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl.

i) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ die Gruppe der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthält.

ii) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ nicht die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln enthält.

Aufgabe 5: $(12+8)$

Sei $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$ für $n \geq 3$, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Sei $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring von K mit Maximalideal $\mathfrak{p}$ und sei k der Restklassenkörper mit $|k| = p^r$, $r \geq 1$. Nehme an, dass $(p, n) = 1$.

i) Zeige, dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}_p$ eine unverzweigte Galoiserweiterung ist und dass der kanonische Homomorphismus von Galoisgruppen

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$$

ein Isomorphismus ist.

ii) Sei $W(k)$ der Wittring von k. Zeige, dass $\mathcal{O}_K \simeq W(k)$. Wie kann man einen solchen Isomorphismus eindeutig charakterisieren?