Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

Wintersemester 2013/14

Klausur zur Vorlesung
Algebra II
10.02.2014

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
erreichbare Punkte	20	20	20	20	20	100
erreichte Punkte						

Note:

Aufgabe 1: $(4+4+4+8)$

Sei k ein beliebiger Körper und sei $k[X]$ der Polynomring mit Quotientenkörper $k(X)$.

i) Zeige, dass $k[X]$ ein Dedekindring ist.

ii) Zeige, dass für jedes normierte irreduzible Polynom $P \in k[X]$ eine diskrete Bewertung

$$v_P : k(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

existiert, sodass $v_P(P) = 1$ und $v_P|_{k\setminus\{0\}} \equiv 0$.

iii) Bestimme den Bewertungsring $\mathcal{O}_P$ von $(k(X), v_P)$.

iv) Bestimme die Vervollständigung von $\mathcal{O}_P$ entlang seines maximalen Ideals für k algebraisch abgeschlossen. Was passiert, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 2: $(10 + 10)$

Sei $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ quadratfrei und sei $p \geq 3$ eine Primzahl mit $(p, d) = 1$. Sei $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Das Ideal $p\mathcal{O}$ ist ein Primideal in $\mathcal{O}$.

ii) Die Gleichung $x^2 \equiv d \pmod{p}$ ist unlösbar.

Aufgabe 3: $(5+5+5+5)$

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

i) Man bestimme die absolute Diskriminante d_K von K.

ii) Zeige, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$.

iii) Man bestimme die Minkowski-Konstante $M = (\frac{4}{\pi})^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|d_K|}$.

iv) Zeige, dass $\mathcal{O}_K$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4: $(8+12)$

Sei p eine Primzahl und sei R ein Ring mit $p \cdot R = 0$. Sei $W(R)$ der Ring der Wittvektoren zur Primzahl p. Bezeichne mit $F : W(R) \to W(R)$ den Frobenius und mit $V : W(R) \to W(R)$ die Verschiebung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $FV = VF = p$ und $V(\underline{a}) \cdot \underline{b} = V(\underline{a} \cdot F(\underline{b}))$, $\underline{a}, \underline{b} \in W(R)$.

i) Zeige, dass für alle $m, n \geq 0$ gilt

$$V^m(\underline{a}) \cdot V^n(\underline{b}) \;=\; V^{m+n}(F^n(\underline{a}) \cdot F^m(\underline{b})).$$

ii) Zeige, dass $W(R)$ genau dann nullteilerfrei ist, wenn R nullteilerfrei ist.

Aufgabe 5: $(10 + 10)$

Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ für $n \geq 3$, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Die Primzahl p ist unverzweigt in $K/\mathbb{Q}$.

ii) Es gilt $(p, n) = 1$ für $p \geq 3$ und $4 \nmid n$ für $p = 2$.