Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2013**
T. Richarz

Algebra I

9. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei k ein Körper, und sei A eine k-Algebra. Sei G eine endliche Gruppe, die auf A durch Automorphismen von k-Algebren operiert. Bezeichne mit $A^G = \{a \in A \mid ga = a,\ \forall\, g \in G\}$ die k-Algebra der invarianten Elemente. Zeige, dass A^G von endlichem Typ über k ist, falls A von endlichem Typ über k ist.

Tip: Sei $x_1, \ldots, x_m$ ein Erzeugendensystem von A über k. Definiere Elemente $y_{i,j} \in A$ durch

$$\prod_{g \in G} (T + g(x_i)) \;=\; T^n + y_{i,1}T^{n-1} + \ldots + y_{i,n},$$

wobei $n = |G|$. Sei B die k-Unteralgebra von A, die durch $y_{i,j}$ erzeugt wird, für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Zeige, dass B von endlichem Typ über k ist, und dass A ein endlich erzeugter B-Modul ist.

Aufgabe 2:
Sei p eine Primzahl, und sei $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Sei G die Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, die von ζ_p erzeugt wird. Definiere eine Operation von G durch Automorphismen von $\mathbb{C}$-Algebren auf dem Polynomring $A = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ durch

$$T_i \;\longmapsto\; \zeta T_i$$

für $1 \leq i \leq n$, $\zeta \in G$. Bestimme die $\mathbb{C}$-Algebra A^G der invarianten Elemente. Gib im Falle $p = 2, 3$ und $n = 2$ eine Darstellung der Form $A^G \simeq \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_k]/(f_1, \ldots, f_l)$ an.

Aufgabe 3:
Sei k ein Körper, und sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) $\dim(A) = 0$;

ii) A ist ein endlichdimensionaler k-Vektorraum;

iii) $\mathrm{Spec}(A)$ ist endlich;

iv) $\mathrm{Max}(A)$ ist endlich.

Aufgabe 4:
Sei k ein Körper. Zeige folgende Aussagen.

i) Gib unendlich viele Primideale der Höhe 1 in $k[T_1, T_2]$ an, die in (T_1, T_2) enthalten sind.

ii) Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ von Höhe ≥ 2. Dann existieren unendlich viele $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ von Höhe 1 mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Abgabe: Donnerstag, 20. Juni 2013.