Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

SS 2013

Algebra I

8. Übungsblatt

Aufgabe 1: (Gaußsches Lemma)
Sei B ein Integritätsbereich, und sei $A \subset B$ ein Unterring. Bezeichne mit C den ganzen Abschluss von A in B. Seien $f, g \in B[X]$ normierte Polynome. Zeige, dass $f, g \in C[X]$, falls $f \cdot g \in C[X]$. Stelle die Beziehung zum Gaußschen Lemma aus dem letzten Semester her.

Tip: Man zerlege f, g in $\bar{L}[X]$ in Linearfaktoren, wobei $\bar{L}$ ein algebraischer Abschluss des Quotientenkörpers L von C ist.

Aufgabe 2:
Sei A ein normaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Primideal. Zeige, dass die Menge $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ endlich ist.

Hinweis: Benutze Blatt 7, Aufgabe 1. Die Aussage gilt auch im Falle, dass L/K endlich, aber nicht notwendigerweise separabel ist.

Aufgabe 3:
Sei L/K eine Körpererweiterung, und sei $\mathfrak{X}$ ein über K algebraisch unabhängiges System von Elementen aus L. Zeige, dass für jeden über K algebraischen Zwischenkörper K' von L/K das System $\mathfrak{X}$ algebraisch unabhängig über K' ist.

Aufgabe 4:
Sei L/K eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Zeige, dass für jeden Zwischenkörper L' in L/K die Erweiterung L'/K endlich erzeugt ist.

Abgabe: Donnerstag, 13. Juni 2013.