Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **SS 2013**

Algebra I
4. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei K'/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei L/K eine beliebige Körpererweiterung. Sei L' die L-Algebra $L' = L \otimes_K K'$.
i) Zeige, dass ein Ringisomorphismus

$$L' \simeq \prod_{i=1}^{n} L_i$$

existiert, wobei die L_i endliche separable Körpererweiterungen von L sind, und zeige ferner, dass $\sum_{i=1}^{n} [L_i : L] = [K' : K]$. Was ist die Zerlegung von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$?
ii) Zeige, dass $L_i \simeq L$ für $i = 1, \ldots, n$, falls L eine normale Hülle von K' ist.

Aufgabe 2:
Ein Ring R heißt reduziert, falls sein Nilradikal trivial ist.
i) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
a) Der Ring R ist reduziert.
b) Der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ ist reduziert für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.
c) Der Ring $R_{\mathfrak{m}}$ ist reduziert für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.
ii) Sei R reduziert, und sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal. Zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3:
Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, und sei $M \subset K$ ein R-Untermodul von K. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ist $M_{\mathfrak{p}} \subset K$. Zeige, dass

$$M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} M_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)} M_{\mathfrak{m}}$$

als R-Untermoduln von K.

Aufgabe 4:
Sei R ein Ring. Für ein Ideal $I \subset R$ bezeichne $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ die Verschwindungsmenge von I. Die $V(I)$ für $I \subset R$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen der Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$.
i) Sei $f \in R$. Zeige, dass es einen kanonischen Homöomorphismus

$$\mathrm{Spec}(R_f) \xrightarrow{\simeq} D(f)$$

gibt, wobei $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$ das offene Komplement zu $V(f)$ bezeichnet.

ii) Sei $f \in R$. Zeige, dass der Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} R[X]/(fX-1) &\longrightarrow R_f \\ X &\longmapsto \frac{1}{f} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist R_f eine R-Algebra von endlichem Typ.

iii) Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeige, dass das Bild von $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$ unter der kanonischen Abbildung $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(R)$ genau der Durchschnitt aller offenen Umgebungen von $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist.

iv) Gib ein Beispiel dafür an, dass eine Lokalisierung eines Rings R im allgemeinen keine R-Algebra von endlichem Typ ist.

Abgabe: Montag, 13. Mai 2013.