Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2013**
T. Richarz

Algebra I
10. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei R eine k-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für die Krulldimension

$$\dim(R) \;=\; \mathrm{Max}_{\mathfrak{p}}\{\dim(R/\mathfrak{p})\}$$

gilt, wobei das Maximum über alle minimalen Primideale genommen wird.

Aufgabe 2:
Sei R eine integre k-Algebra von endlichem Typ, und sei $f \in R\backslash\{0\}$ nicht invertierbar. Zeige, dass für die Krulldimension

$$\dim(R/(f)) \;=\; \dim(R) - 1$$

gilt.

Aufgabe 3:
Sei R eine k-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für die Krulldimension

$$\dim(R[T, T^{-1}]) \;=\; \dim(R) + 1$$

gilt, wobei $R[T, T^{-1}]$ die Lokalisierung des Polynomrings $R[T]$ an der multiplikativen Menge $\{T^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet.

Aufgabe 4:
Seien R, S zwei k-Algebren, und sei $T = R \otimes_k S$ ihr Tensorprodukt (wieder eine k-Algebra).
i) Zeige, dass für die Krulldimension

$$\dim(T) \;=\; \dim(R) + \dim(S),$$

gilt, falls R und S von endlichem Typ über k sind.
ii) Gib ein Beispiel an, in dem R und S endliche Krulldimension haben, aber T unendliche Krulldimension hat.

Abgabe: Donnerstag, 27. Juni 2013.