Algebra I

Lösungsskizze zur Klausur

Aufgabe 1:
Sei A ein Ring, und sei $\mathrm{Nil}(A)$ das Nilradikal.

i) Zeige, dass ein $n \geq 0$ existiert mit

$$\mathrm{Nil}(A)^n \;=\; 0,$$

falls A noethersch ist.

ii) Gib ein Beispiel eines Ringes A an, in dem $\mathrm{Nil}(A)^n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Zu i): Weil A noethersch ist, ist $\mathrm{Nil}(A)$ endlich erzeugt. Sei $\mathrm{Nil}(A) = (f_1, \ldots, f_k)$, und wähle $n_1, \ldots, n_k \geq 0$ mit $f_i^{n_i} = 0$. Sei $n = n_1 + \ldots + n_k$. Dann wird $\mathrm{Nil}(A)^n$ von den Monomen $f^{\underline{m}} = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_k^{m_k}$ mit $m_1 + \ldots + m_k = n$ erzeugt. Aber es gilt $f^{\underline{m}} = 0$. Denn aus $m_1 + \ldots + m_k = n$ folgt, dass ein i existiert mit $m_i \geq n_i$, d.h. $f_i^{m_i} = 0$. Das zeigt $\mathrm{Nil}(A)^n = 0$.

Zu ii): Betrachte den Ring

$$A = \mathbb{Q}[X_i;\ i \in \mathbb{N}]/(X_i^i;\ i \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt $\mathrm{Nil}(A) = (X_i;\ i \in \mathbb{N})$. Aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_{n+1}^n \neq 0$ für die Restklasse von X_{n+1} in A. Das zeigt $\mathrm{Nil}(A)^n \neq 0$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 2:
Sei $k[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper k.

i) Gib die abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an.

ii) Gib die in der Zariski-Topologie abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an, falls k algebraisch abgeschlossen ist.

Zu i): Jedes Ideal in $k[X]$ ist ein Hauptideal, d.h. von der Form (f) für ein eindeutiges normiertes Polynom $f \in k[X]$. Die abgeschlossenen Punkte in $\mathrm{Spec}(k[X])$ sind genau die maximalen Ideale, und sind daher von Form (f) mit $f \in k[X]$ irreduzibel.

Zu ii): Weil k algebraisch abgeschlossen ist, sind die normierten irreduziblen Polynome von der Form $X - a$, $a \in k$. Die abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(k[X])$ sind daher $\varnothing$, $\mathrm{Spec}(k[X])$ und endliche Vereinigungen von $\{(X - a)\}$ für $a \in k$.

Aufgabe 3:
Sei A ein Ring, und sei M ein A-Modul.

i) Zeige, dass M flach über A ist, falls M frei ist.

ii) Gib ein Beispiel eines Ringes A und eines flachen Moduls M an, der nicht frei ist.

Zu i): Sei $M = \oplus_{i \in I} A$ für eine Indexmenge I, und sei

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} P$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist das folgende Diagramm von A-Moduln

$$\begin{tikzcd} N \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P \otimes_A M \arrow[d, "f_2"] \\ \oplus_{i \in I} N \arrow[r, "\oplus_{i \in I} g"] & \oplus_{i \in I} P \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei die Morphismen durch $f_1(n \otimes (a_i)_{i\in I}) = (a_i \cdot n)_{i\in I}$ für $n \in N$ (resp. $f_2(p \otimes (a_i)_{i\in I}) = (a_i \cdot p)_{i\in I}$ für $p \in P$) auf Elementartensoren gegeben sind. Aber nach einer Übungsaufgabe sind f_1 und f_2 Isomorphismen. Weil der Morphismus $\oplus_{i\in I} g$ injektiv ist, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M$$

exakt, und M ist flach.

Zu ii): Betrachte $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Als Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an $\mathbb{Z} - \{0\}$ ist $\mathbb{Q}$ flach, aber $\mathbb{Q}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Denn angenommen $\mathbb{Q} \simeq \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}$ für eine nichtleere Indexmenge I, dann gilt

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq (\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \oplus_{i\in I}\mathbb{F}_p \neq 0,$$

was ein Widerspruch zu $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = \mathbb{Q}/(p)\mathbb{Q} = 0$ ist.

Aufgabe 4:

Bestimme die Krulldimension der folgenden Ringe.

i) $\mathbb{Z}$;

ii) $k[X] \otimes_k k[X]$, k Körper;

iii) $k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$;

iv) $\prod_{i=1}^n k$, k Körper, $n \geq 1$.

Zu i): Der Ring $\mathbb{Z}$ ist euklidisch, und daher ein Hauptidealring. Also ist jedes Primideal $\neq 0$ ein Maximalideal, und folglich $\dim(\mathbb{Z}) = 1$.

Zu ii): Die Argumentation aus i) zeigt $\dim(k[X]) = 1$. Weil $k[X]$ eine endlich erzeugte k-Algebra ist, gilt nach einer Übungsaufgabe

$$\dim(k[X] \otimes_k k[X]) = \dim(k[X]) + \dim(k[X]) = 2.$$

Zu iii): Auf einem Übungszettel wurde gezeigt $k[X, Y]/(X^2 - Y^3) \simeq k[T^2, T^3]$ als k-Algebren, wobei der Isomorphismus eindeutig durch $X \mapsto T^3$, $Y \mapsto T^2$ bestimmt ist. Die Ringerweiterung $k[T^2, T^3] \subset k[T]$ ist endlich erzeugt und ganz, also endlich. Daher gilt

$$\dim([X, Y]/(X^2 - Y^3)) = \dim(k[T^2, T^3]) = \dim(k[T]) = 1.$$

Zu iv): Für $1 \leq i \leq n$ sei $a_i \in \prod_{i=1}^n k$ das Element $a_i = (1, \ldots, 1, 0, 1 \ldots, 1)$, wobei die 0 an der i-ten Stelle ist. Dann ist (a_i) ein Primideal, und es gilt

$$\operatorname{Spec}(\prod_{i=1}^n k) = \coprod_{i=1}^n \{(a_i)\}.$$

Folglich $\dim(\prod_{i=1}^n k) = 0$.

Aufgabe 5:

Bestimme für folgende Ringerweiterungen $R \subset S$ den ganzen Abschluss von R in S.

i) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Q}(i)$;

ii) $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $S = k(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, k ein Körper;

iii) $R = k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$, $S = \operatorname{Quot}(R)$ der Quotientenkörper.

Im folgenden bezeichne $\tilde{R}$ den ganzen Abschluss von R in S.

Zu i): Es gilt $\mathbb{Z}[i] \subset \tilde{R}$. Wir zeigen, dass Gleichheit gilt. Da die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ von

Grad 2 ist, ist ein Element $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$ genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn $\mathrm{Spur}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{Norm}(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Sei $\alpha = a + ib$ in $\tilde{R}$. Es ist

$$\mathrm{Spur}(\alpha) = 2a, \qquad \mathrm{Norm}(\alpha) = a^2 + b^2.$$

Daraus folgt leicht, dass $a, b \in \mathbb{Z}$ sind, und somit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Das zeigt $\tilde{R} = \mathbb{Z}[i]$.

Zu ii): Der Ring R ist faktoriell, und damit ganzabgeschlossen. Also gilt $\tilde{R} = R$.

Zu iii): Wie in Aufgabe 4), iii) ist $R \simeq k[T^2, T^3]$, und folglich $S \simeq k(T)$. Die Ringerweiterung $k[T^2, T^3] \subset k[T]$ ist endlich, und $k[T]$ ist nach Punkt ii) ganzabgeschlossen in $k(T)$. Das zeigt, dass $k[T]$ der ganze Abschluss von $k[T^2, T^3]$ in $k(T)$ ist. Damit ist $\tilde{R} = R[\frac{X}{Y}]$, wobei hier die Restklassen von X, Y in R mit demselben Symbol bezeichnet sind.

Aufgabe 6:

Sei A ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal, und sei A vollständig und separiert bezüglich der I-adischen Topologie. Zeige, dass ein Element $a \in A$ genau dann eine Einheit ist, falls $a \mod I$ eine Einheit ist.

Sei $a \in A^\times$. Die Projektion $A \to A/I$ ist ein Ringmorphismus, und somit ist $a \mod I$ invertierbar. Umgekehrt sei $a \mod I$ invertierbar, d.h. es existiert ein $b \in A$ mit $ab = 1 + r$, wobei $r \in I$. Es genügt zu zeigen, dass $1 + r \in A^\times$. Die Folge von Elementen

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} (-r)^i$$

bildet eine Cauchy-Folge, denn $r_{n+1} - r_n \in I^{n+1}$. Da A vollständig und separiert bezüglich der I-adischen Topologie ist, existiert ein eindeutiges Element $s \in A$ mit $s - r_n \in I^n$ für alle $n \geq 0$. Es gilt $(1 + r)s = 1$.