Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

Sommersemester 2013

Nachklausur zur Vorlesung Algebra I

12.10.2013

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note:

Aufgabe 1: $(5 + 5)$

Sei A ein Ring, und seien $I, J \subset A$ beliebige Ideale.

i) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Zeige, dass $I \cdot J \subset \mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn $I \subset \mathfrak{p}$ oder $J \subset \mathfrak{p}$.

ii) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ bezeichne $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid \exists\, n > 0 : \; x^n \in \mathfrak{a}\}$ das Radikalideal. Zeige, dass für die Radikalideale $\mathrm{rad}(I \cdot J) = \mathrm{rad}(I) \cap \mathrm{rad}(J)$ gilt.

Aufgabe 2: $(5 + 5)$

Sei $k[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper k.

i) Beschreibe die Menge $\mathrm{Spec}(k[X])$ durch Elemente aus $k[X]$, und gib die abgeschlossenen Punkte in der Zariski-Topologie an.

ii) Gib die in der Zariski-Topologie offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an.

Aufgabe 3: $(4 + 6)$

Sei A ein Ring, und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $N \subset M$ ein A-Untermodul.

i) Gib eine Voraussetzung an A an, die sichert, dass auch N endlich erzeugt über A ist.

ii) Gib ein Beispiel an, in dem N nicht endlich erzeugt über A ist.

Aufgabe 4: $(4 + 3 + 3)$
Bestimme die Krulldimension der folgenden Ringe.
i) $\mathbb{Z}[i]$;
ii) $k[X] \otimes_k k[Y]$, k Körper;
iii) $\mathbb{Q}[U, V, W]/(W^2 - VW + U)$.

Aufgabe 5: $(3 + 4 + 3)$

Bestimme für folgende Ringerweiterungen $R \subset S$ den ganzen Abschluss von R in S.

i) $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $S = k(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, k Körper;

ii) $R = \mathrm{im}(\varphi)$ das Bild des $\mathbb{Q}$-Algebrenmorphismus $\varphi : \mathbb{Q}[U, V] \to \mathbb{Q}[X, Y], U \mapsto X \cdot Y, V \mapsto X + Y$, $S = \mathbb{Q}(X, Y)$;

iii) $R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Q}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C} \backslash \bar{\mathbb{Q}}$ nicht algebraisch.

Aufgabe 6: (10)

Sei A ein noetherscher Ring. Sei $A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten, und sei $A[\![X]\!]$ der Potenzreihenring. Sei $a \in A$ beliebig. Zeige, dass $X - a$ kein Nullteiler in $A[\![X]\!]$ ist.