

Einführung in die Algebra
6. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bestimme für den Ring $\mathbb{Z}/420\mathbb{Z}$ die Anzahl seiner

- a) Nullteiler,
- b) Einheiten,
- c) Ideale,
- d) Primideale,
- e) maximalen Ideale.

Aufgabe 2:

Sei R ein kommutativer Ring. Seien I, J Ideale in R .

- a) Zeige, dass $I \cdot J \subset I \cap J$, und gib ein Beispiel an, in dem die Inklusion strikt ist.
- b) Beweise, dass $I \cdot J = I \cap J$, falls $I + J = R$.

Aufgabe 3:

Gib in den Polynomringen $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X, Y]$ Primideale an, die nicht maximal sind. Gib jeweils ein Ideal an, das kein Hauptideal ist.

Aufgabe 4:

Ein Element a eines Ringes heißt *nilpotent*, falls ein $n \geq 0$ existiert mit $a^n = 0$. Sei R ein kommutativer Ring.

- a) Berechne die Einheiten des Potenzreihenrings $R[[X]]$, und bestimme alle Ideale im Falle, dass R ein Körper ist.
- b) Zeige:

$$R[[X]]^\times = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid a_0 \in R^\times \text{ und } a_i \text{ nilpotent für } i = 1, \dots, n \right\}$$

Aufgabe 5:

Matheparty am Dienstag, 20. November!!! Ab 22 Uhr startet die Sause im goldenen Engel mit DJ Lost Boy. Beim Eintritt gibt es Welcome-Shots, und am Tresen ErdbeerLimes für 1€. Karten im VVK kosten 2€ und an der AK 4€. Der VVK findet am Do. 15.11., Mo. 19.11. und Di. 20.11. in der Mensa Poppelsdorf statt.

Abgabe: Donnerstag, 22. November 2012.