

Einführung in die Algebra

12. Übungsblatt

**Aufgabe 1:**

Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern  $E$  und  $F$ . Zeige, dass

- $[EF : F] \leq [E : E \cap F]$ ,
- $[EF : K] \leq [E : K][F : K]$ ,
- $[EF : K] = [E : K][F : K]$ , falls  $[E : K]$  und  $[F : K]$  teilerfremd sind.

**Aufgabe 2:**

- Berechne das Minimalpolynom von  $e^{2\pi i/3}$  über  $\mathbb{Q}$ .
- Berechne das Minimalpolynom von  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  über  $\mathbb{Q}$ . Gilt  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ?
- Zeige, dass es Körper der Ordnung 8 und 25 gibt.

**Aufgabe 3:**

Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung. Sei  $a \in L$ , und sei  $\phi_a : L \rightarrow L$  die  $K$ -lineare Abbildung mit  $\phi_a(x) = ax$ .

- Das Minimalpolynom von  $a$  über  $K$  ist gleich dem Minimalpolynom von  $\phi_a$ .
- Falls  $L = K(a)$ , dann ist das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom.
- Das charakteristische Polynom von  $\phi_a$  ist eine Potenz des Minimalpolynoms.

**Aufgabe 4:**

Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung.

- Sei  $a \in L \setminus \{0\}$ . Dann ist  $a$  genau dann algebraisch über  $K$ , wenn  $a^{-1} \in K[a]$ .
- Die Erweiterung  $L/K$  ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring  $R$  von  $L$  mit  $K \subset R$  ein Körper ist.

Abgabe: Donnerstag, 17. Januar 2013.