Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 3

Abgabe 27.04.2012

Aufgabe 1:

(i) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom $\chi_f(X) = X(X-1)^4 \in K[X]$ und $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}_V) = 2$. Bestimme die Jordansche Normalform von f.

(ii) Für $A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ gelte: $\chi_A(X) = (X-2)^3(X+4)^2$ und $\mu_A(X) = (X-2)^2(X+4)$. Was ist die Jordansche Normalform von A?

Aufgabe 2:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & -10 \\ -1 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(i) Bestimme die Jordansche Normalform von A.

(ii) Finde eine diagonalisierbare Matrix D und eine nilpotente Matrix N, so dass $DN = ND$ und $A = D + N$ gilt. Drücke D und N als Polynome in A aus.

Aufgabe 3:

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl.

(i) Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl und sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert mit $B^k = A$.

(ii) Ist es notwendig vorauszusetzen, dass A invertierbar ist?

(iii) Bestimme eine Matrix $B \in M_3(\mathbb{C})$, so dass $B^3 = A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper und sei $f : V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Das charakteristische Polynom χ_f und das Minimalpolynom μ_f stimmen überein.

(b) In der Jordanschen Normalform von f gibt es zu jedem Eigenwert nur einen Jordanblock.

(c) Für alle Eigenwerte λ von f gilt: $\dim V(\lambda, f) = 1$.

(d) Es gibt ein $v \in V$, so dass $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ eine Basis von V ist.

(e) Es gibt eine Basis B von V, so dass f bezüglich B die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & 1 & & 0 & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & * \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`