Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Abgabe 29.06.2012

Aufgabe 1:

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$ mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform β. Finde n Spiegelungen $S_1, \ldots, S_n \in O(V, \beta)$, sodass

$$-\mathrm{id}_V = S_1 \cdot S_2 \cdot \cdots \cdot S_n.$$

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$. Gib ein Beispiel eines K-Vektorraums E mit einer symmetrischen Bilinearform β sowie einer Isometrie $F_1 \to F_2$ von Unterräumen von E, die sich nicht zu einer Isometrie $E \to E$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 3:

(i) Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe. Zeige, dass es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, so dass
$$A^{-1}GA = \{A^{-1}gA \mid g \in G\} \subset O(n, \mathbb{R}).$$

(ii) Formuliere und beweise eine analoge Aussage für endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper der Charkteristik $\operatorname{char} K \neq 2$. Beweise die folgende Variante des Kürzungssatzes von Witt: Sind F, G_1, G_2 quadratische Räume über K und ist F nichtausgeartet und gilt

$$F \perp G_1 \cong F \perp G_2,$$

so folgt $G_1 \cong G_2$.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`