Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 10

Abgabe 22.06.2012

Aufgabe 1:

(i) Zeige, dass die Determinante det eine quadratische Form auf $M_2(\mathbb{R})$ ist und bestimme die zugehörige Bilinearform.

(ii) Bestimme den Signaturtyp von det auf $M_2(\mathbb{R})$ und den Signaturtyp der Einschränkung von det auf den Raum $M_2(\mathbb{R})^0$ der Matrizen mit Spur 0.

Aufgabe 2:

Sei V_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten und sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$b(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q'(x)dx.$$

(i) Zeige, dass b eine Bilinearform ist und schreibe b als Summe einer symmetrischen Bilinearform b_s und eine antisymmetrischen Bilinearform b_a. Forme b_s in einen Ausdruck um, in dem kein Integral mehr auftritt.

(ii) Berechne den Signaturtyp von b_s und gib eine Basis von V_n an, bezüglich der b_s durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen $1, 0, -1$ beschrieben wird.

(iii) Bestimme eine Basis von V_4 bezüglich der b_a durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 3:

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n mit symmetrischer Bilinearform β. Für $k = 1, \ldots, n$ sei d_k die k-te Hauptdeterminante der Fundamentalmatrix B_β bezüglich einer beliebigen Basis. Es sei $d_k \neq 0$ für alle k. Zeige, dass der Trägheitsindex von (V, β) gerade gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $1, d_1, d_2, \ldots, d_n$ ist.

Aufgabe 4:
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_n(\mathbb{R})$ sei mit der symmetrischen Bilinearform

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$$

versehen. Für $A \in V$ sei $V_A = \{p(A) \mid p \in \mathbb{R}[X]\}$. Die Einschränkung von b auf $V_A \times V_A$ werde mit b_A bezeichnet.

(i) Sei $V_s \subset V$ der Unterraum der symmetrischen und $V_a \subset V$ der Unterraum der antisymmetrischen Matrizen. Untersuche, ob die Einschränkung von b auf $V_s \times V_s$ (bzw. auf $V_a \times V_a$) positiv definit, negativ definit, oder indefinit ist.

(ii) Bestimme den Signaturtyp von b.

(iii) Zeige: Sind $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ähnlich, so haben b_A und b_B denselben Signaturtyp.

(iv) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Berechne den Signaturtyp von b_A und gib eine Basis von V_A an, bezüglich der b_A durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`