Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

Sommersemester 2012

Klausur zur Vorlesung
Lineare Algebra II
14.07.2012

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Papier, Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
erreichbare Punkte	12	10	10	13	12	13	70
erreichte Punkte							

Note:

Aufgabe 1: (6+2+4 Punkte)

(i) Bestimme die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

(ii) Sei $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ ein Endomorphismus mit $\chi_f(X) = (X+2)^4(X-1)^2$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f + 2\mathrm{id}) > \operatorname{rg}(f + 2\mathrm{id})^2 &= 2, \\ \operatorname{rg}(f - \mathrm{id}) &= 5. \end{aligned}$$

(a) Bestimme das Minimalpolynom μ_f von f.

(b) Bestimme alle möglichen Jordanschen Normalformen von f.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Berechne die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

in der Form $A = PS$, wobei $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit ist und $S \in O(n, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Bestimme den Signaturtyp der symmetrischen Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die durch die Strukturmatrix

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 4: (13 Punkte)
Sei $f : V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Ferner sei der Vektorraum f-zyklisch, d.h. es gibt einen Vektor $0 \neq v \in V$, so dass $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ eine Basis von V ist.
Zeige, dass jeder f-invariante Unterraum $U \subset V$ ebenfalls f-zyklisch ist.

Aufgabe 5: (8+4 Punkte)

Sei $V, (\cdot, \cdot)$ ein unitärer Vektorraum der Dimension n. Zeige:

(i) Jede vollständige Flagge
$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$
wird von einer Orthonormalbasis erzeugt, d.h. es gibt eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ von V, sodass $V_i = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

(ii) Sei $f : V \to V$ trigonalisierbar. Zeige, dass es eine Orthonormalbasis B von V gibt, sodass $c_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 6: (13 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform β der Signatur (p, q). Sei $U \subset V$ ein maximal isotroper Teilraum (d.h. $\beta|_{U \times U} = 0$ und U ist maximal mit dieser Eigenschaft). Zeige, dass
$$\dim U = \min(p, q).$$