Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

**Lineare Algebra I**

**Übungsblatt 4**

**Abgabe 11.11.2011**

**Aufgabe 1:**
Eine *Flagge* in einem Vektorraum $V$ ist eine endliche Folge $U_0, U_1, \dots, U_n$ von Unterräumen von $V$, so dass für $1 \leq i \leq n$ gilt: $U_{i-1} \subsetneq U_i$. Die Zahl $n$ heißt Länge der Flagge. Beweise:

(i) Ist $V$ nicht endlich erzeugt, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Flagge der Länge $n$ in $V$.

(ii) Der Vektorraum $V$ ist genau dann endlich erzeugt von Dimension $n$, wenn es in $V$ eine Flagge der Länge $n$, aber keine Flagge der Länge $n+1$ gibt.

**Aufgabe 2:**

(i) Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum, mit $n \geq 2$. Seien $U_1$ und $U_2$ zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Unterräume. Zeige, dass $\dim U_1 \cap U_2 = n-2$.

(ii) (a) Zu welchen natürlichen Zahlen $n$ gibt es Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{Q}^{10}$ der Dimension 7, so dass $U_1 \cap U_2$ die Dimension $n$ hat?

(b) Beantworte die Frage aus Teil (a) für $\mathbb{F}_p$ anstelle von $\mathbb{Q}$.

**Aufgabe 3:**
Sei $K$ ein Körper. Zeige:

(i) Es gibt eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{Z} \to K$ mit

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b), \text{ für alle } a, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

sowie $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

(ii) Falls $f$ injektiv ist, so gibt es eine eindeutige Abbildung $g : \mathbb{Q} \to K$ mit $g|_{\mathbb{Z}} = f$ und

$$\begin{aligned} g(a+b) &= g(a) + g(b) \\ g(ab) &= g(a)g(b), \text{ für alle } a, b \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

(iii) Falls $f$ nicht injektiv ist, so ist

(a) $p = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > 0 \text{ und } f(m) = 0\}$ eine Primzahl.

(b) durch $\bar{f} = f|_{\{0,\dots,p-1\}}$ eine injektive Abbildung $\bar{f} : \mathbb{F}_p \to K$ definiert, für die

$$\begin{aligned} \bar{f}(a +_p b) &= \bar{f}(a) + \bar{f}(b) \\ \bar{f}(a \times_p b) &= \bar{f}(a)\bar{f}(b), \text{ für alle } a, b \in \mathbb{F}_p \end{aligned}$$

gilt.

**Aufgabe 4:**
Sei $K$ ein Körper, $W$ ein $K$-Vektorraum, und seien $U_1$, $U_2$, $U_3$ Unterräume von $W$. Wir definieren

$$V_1 = (U_1 + U_2) \cap U_3, \qquad V_2 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3),$$
$$V_3 = (U_1 \cap U_2) + U_3, \qquad V_4 = (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3).$$

(i) Zeige, dass $V_2 \subset V_1$ und $V_3 \subset V_4$ gilt.

(ii) Gib ein Beispiel für $W$, $U_1$, $U_2$, $U_3$ an, in dem $V_1 \neq V_2$ und $V_3 \neq V_4$ gilt.

(iii) Zeige durch wiederholte Anwendung der Dimensionsformel für Untervektorräume, dass $\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \dim V_4 = 0$ gilt.

(iv) Ändert sich die Differenz $\dim V_1 - \dim V_2$, wenn man in der Definition von $V_1$ und $V_2$ die Rollen von $U_1$, $U_2$ und $U_3$ vertauscht?

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`