Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 7

Abgabe 30.05.2011

Aufgabe 1:
Zeige, dass für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\cos(bx)dx = \exp(-\tfrac{b^2}{4})\sqrt{\pi}.$$

(Hinweis: Integriere entlang des Rechteckes mit den Ecken $r, r + ib/2, -r + ib/2, -r$.)

Aufgabe 2:
Sei $R(x)$ eine rationale Funktion mit $\deg R \leq -1$.

(i) Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\exp(ix)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z\big(R(z)\exp(iz)\big)$$

gilt, falls R keine Pole auf $\mathbb{R}$ hat.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$, so dass R keinen Pol auf $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ hat. Ferner habe R einen einfachen Pol in a. Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\exp(ix)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z\big(R(z)\exp(iz)\big) + \pi i \operatorname{Res}_a\big(R(z)\exp(iz)\big)$$

gilt.

(Hinweis: Integriere entlang eines Rechteckes mit den Ecken $R, R+is, -R+is, -R$. Für den zweiten Teil der Aufgabe muss der Integrationsweg leicht modifiziert werden.)

Aufgabe 3:
Berechne die folgenden reellen Integrale:

(i) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$

Aufgabe 4:

(i) Bestimme die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in den angegebenen Gebieten:

(a) $2z^4 - 5z + 2$ in $\{|z| > 1\}$,
(b) $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $\{|z| < 1\}$,
(c) $z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $\{1 < |z| < 2\}$.

(ii) Beweise mit Hilfe des Satzes von Rouché den Fundamentalsatz der Algebra.