

**Algebra II – Kommutative Algebra****2. Übungsblatt****Aufgabe 1:**

Sei  $A$  ein Ring und  $I$  ein endlich erzeugtes Ideal mit  $I = I^2$ . Dann wird  $I$  durch ein Idempotent  $e$  (d.h. ein Element mit  $e^2 = e$ ) erzeugt.

**Aufgabe 2:**

Zeigen Sie Nakayamas Lemma ohne die Verwendung von Determinanten: Verwenden Sie Induktion nach der minimalen Anzahl von Erzeugern von  $M$  und  $\mathfrak{a}M = M$ , um ein geeignetes Vielfaches eines der Erzeuger durch die anderen auszudrücken.

**Aufgabe 3:**

Seien  $I_1, \dots, I_n$  Ideale eines Rings  $A$  mit  $I_1 \cap \dots \cap I_n = (0)$ . Sei  $A/I_i$  noethersch für jedes  $i$ . Zeigen Sie, daß  $A$  noethersch ist.

**Aufgabe 4:**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt noethersch wenn die offenen Teilmengen von  $X$  die aufsteigende Kettenbedingung erfüllen, oder äquivalent dazu, wenn die abgeschlossenen Teilmengen die absteigende Kettenbedingung erfüllen.

1. Ist  $X$  noethersch, so auch jeder Unterraum.
2. Ist  $X$  noethersch, so ist  $X$  quasi-kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
3. Ist  $A$  ein noetherscher Ring, so ist  $\text{Spec}(A)$  ein noetherscher topologischer Raum. Gilt auch die Umkehrung?

Abgabe: Donnerstag, 29. Oktober 2009.

**Homepage:**

<http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/>