Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 5, Abgabe am 08.05.2007

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 17

a) Seien $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_m]$ homogene Polynome vom selben Grad, so dass $U := \mathbb{P}^m(k) \setminus V_+(f_0, \dots, f_n) \neq \emptyset$. Zeige, dass die Vorschrift

$$(x_0 : \dots : x_m) \mapsto (f_0(x_0, \dots, x_m) : \dots : f_n(x_0, \dots, x_m))$$

einen Morphismus $U \longrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ von Prävarietäten induziert.

Insbesondere induziert ein injektiver Vektorraumhomomorphismus $k^{m+1} \longrightarrow k^{n+1}$ einen Morphismus $\mathbb{P}^m(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k)$.

b) Aus Teil a) folgt, dass die Gruppe $GL_{n+1}(k)$ auf $\mathbb{P}^n(k)$ durch Automorphismen von Prävarietäten operiert. Ist $g \in GL_{n+1}(k)$, so bezeichnen wir den zugehörigen Automorphismus von $\mathbb{P}^n(k)$ ebenfalls mit g. Sei $H \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine Hyperebene und sei $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$. Zeige, dass $g \in GL_{n+1}(k)$ existiert, so dass $g(H) = V_+(X_n)$ und $g(p) = (0 : \dots : 0 : 1)$.

Aufgabe 18

Wir identifizieren $\mathbb{A}^n(k)$ mit der offenen Teilmenge

$$U_0 = \{(x_0 : \dots : x_n);\ x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k).$$

Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen und irreduzibel. Sei $\overline{Y}$ der Abschluss von Y in $\mathbb{P}^n(k)$.

a) Zeige, dass $\overline{Y} = V_+(\beta(f), f \in I(Y))$, wobei $\beta(f) = X_0^{\deg f} f(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0})$ für $f \in \Gamma(\mathbb{A}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)})$.

b) Zeige am Beispiel der getwisteten Kubik $V(Y - X^2, Z - X^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$, dass für Erzeuger $f_1, \dots, f_m$ von $I(Y)$ im allgemeinen nicht $\overline{Y} = V_+(\beta(f_1), \dots, \beta(f_m))$ gilt.

Aufgabe 19

Seien $n, d > 0$ ganze Zahlen. Seien $M_0, \dots, M_N \in k[X_0, \dots, X_n]$ sämtliche Monome in $X_0, \dots, X_n$ vom Grad d.

a) Der Ringhomomorphismus $\theta\colon k[Y_0, \dots, Y_N] \longrightarrow k[X_0, \dots, X_n]$ sei gegeben durch $Y_i \mapsto M_i$. Sei $\mathfrak{a} = \ker\theta$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist, das von homogenen Polynomen erzeugt wird. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ daher eine projektive Varietät $V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}^N(k)$ definiert.

b) Betrachte den Morphismus (vgl. Aufgabe 17)

$$\rho_d\colon \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^N(k),\ (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (M_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : M_N(x_0, \dots, x_n)),$$

und zeige, dass ρ_d einen Isomorphismus $\mathbb{P}^n(k) \cong V_+(\mathfrak{a})$ von Prävarietäten induziert. Die Abbildung ρ_d heißt *d-Tupel-Einbettung* oder *d-fache Veronese-Einbettung*. Ist $V_+(\mathfrak{a})$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{P}^N(k)$?

Aufgabe 20

Seien $n, d > 0$ ganze Zahlen. Sei $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d, $f \neq 0$. Sei U die offene Unterprävarietät

$$U = \mathbb{P}^n(k) \setminus V_+(f)$$

von $\mathbb{P}^n(k)$. Zeige, dass U eine affine Varietät ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 19, um die Aussage auf den Fall $d = 1$ zurückzuführen.