

Lineare Algebra II

10. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 06.07.04 in der Vorlesung

**Aufgabe 1**

Sei  $n \geq 1$  eine ganze Zahl und sei  $V = M_n(\mathbb{C})$  der  $n^2$ -dimensionale  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der komplexen  $(n \times n)$ -Matrizen. Für  $A \in M_n(\mathbb{C})$  betrachte die lineare Abbildung

$$\ell_A: V \longrightarrow V, \quad X \mapsto AX - XA.$$

a) Zeige für  $m \geq 0$ :

$$\ell_A^m(X) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} A^{m-i} X A^i.$$

b) Zeige: Ist  $A$  nilpotent oder unipotent, so ist  $\ell_A$  nilpotent.

c) Gib eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform von  $\ell_A$  an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

d) (*Zusatzaufgabe*) Löse c) für eine beliebige nilpotente Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  in Jordanscher Normalform.

**Aufgabe 2**

Sei wieder  $n \geq 1$  eine ganze Zahl und sei  $V = M_n(\mathbb{C})$  der  $n^2$ -dimensionale  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der komplexen  $(n \times n)$ -Matrizen. Für  $A \in M_n(\mathbb{C})$  sei  $\ell_A$  die in Aufgabe 1 definierte Abbildung, und für  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  sei  $i_S$  die Abbildung

$$i_S: V \longrightarrow V, \quad X \mapsto SXS^{-1}.$$

Zeige:

a)  $i_{ST} = i_S \circ i_T$ ,  $\ell_{SAS^{-1}} = i_S \circ \ell_A \circ i_S^{-1}$ ,  $\ell_{A+B} = \ell_A + \ell_B$ .

b) Aus  $AB = BA$  folgt  $\ell_A \circ \ell_B = \ell_B \circ \ell_A$ .

c) Ist  $S$  unipotent, so auch  $i_S$ . (*Hinweis*: Schreibe  $i_S - \text{id}_V$  als Komposition von  $\ell_S$  mit einem Automorphismus  $m_S$  von  $V$ , welcher mit  $\ell_S$  kommutiert, und wende 1 b) an.)

d) Ist  $A$  bzw.  $S$  diagonalisierbar, so auch  $\ell_A$  bzw.  $i_S$ .

e) Ist  $A = H + N$  (bzw.  $S = H \cdot U$ ) die additive (bzw. multiplikative) Jordanzerlegung von  $A$  (bzw.  $S$ ) in eine halbeinfache Matrix  $H$  und eine nilpotente Matrix  $N$  (bzw. unipotente Matrix  $U$ ), so ist  $\ell_A = \ell_H + \ell_N$  (bzw.  $i_S = i_H \circ i_U$ ) die entsprechende Jordanzerlegung des Endomorphismus  $\ell_A$  (bzw.  $i_S$ ) von  $V$ .

### Aufgabe 3

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$ , und sei  $f$  ein trigonalisierbarer Endomorphismus von  $V$ . Zeige, dass  $f$  genau dann halbeinfach ist, wenn jeder  $f$ -invariante Unterraum von  $V$  ein  $f$ -invariantes Komplement besitzt.

### Aufgabe 4

Sei  $K$  ein Körper. Für  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  und  $\lambda \in K$  betrachte den Endomorphismus  $\Phi_{ij}(\lambda): M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ , definiert durch

$$\Phi_{ij}(\lambda)(A) = T_{ji}(\lambda) A T_{ij}(\lambda),$$

wobei  $T_{ij}(\lambda)$  auf der Diagonalen den Eintrag 1, an der Stelle  $(i, j)$  den Eintrag  $\lambda$  und ansonsten den Eintrag 0 hat.

a) Zeige, dass  $\Phi_{ij}(\lambda)$  die Mengen der symmetrischen, der schiefsymmetrischen und (für  $K = \mathbb{R}$ ) der positiv definiten symmetrischen Matrizen jeweils auf sich abbildet.

b) Es gelte  $1 + 1 \neq 0$  in  $K$ . Zeige, dass man jede symmetrische Matrix durch wiederholtes Anwenden von Transformationen  $\Phi_{ij}(\lambda)$  in eine Diagonalmatrix überführen kann.

c) Sei  $K = \mathbb{R}$ . Zeige, dass man jede positiv definite symmetrische Matrix in  $M_n(\mathbb{R})$  durch wiederholtes Anwenden von Transformationen  $\Phi_{ij}(\lambda)$  mit  $i < j$  in eine Diagonalmatrix überführen kann, und zeige anhand eines Beispiels, dass dies nicht für beliebige symmetrische Matrizen in  $M_n(\mathbb{R})$  möglich ist.