Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 10

Aufgabe 5

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbare Matrizen, so dass für alle $i \geq 0$ gilt: $\operatorname{Spur} A^i = \operatorname{Spur} B^i$. Zeige, dass A und B ähnlich sind.

Aufgabe 6

Sei V_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten, und sei $b\colon V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$b(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q'(x)dx.$$

Zeige, dass b eine Bilinearform ist, schreibe b als Summe einer symmetrischen Bilinearform b_s und einer antisymmetrischen Bilinearform b_a und forme b_s in einen Ausdruck um, in dem kein Integral mehr auftritt.

Aufgabe 7

Betrachte die alternierende Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$, die gegeben ist durch

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gib eine invertierbare Matrix $A \in GL_4(\mathbb{R})$ an, so dass ${}^tABA$ Normalform hat.

Aufgabe 8

Zeige, dass $\mathbb{R}^4$ mit der durch die Strukturmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Bilinearform äquivalent ist zum hyperbolischen Raum der Dimension 4.