Lineare Algebra I

Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

U. Görtz

Aufgabe 1

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien f und g Endomorphismen von V mit $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

a) Sind f und g diagonalisierbar, so sind sie simultan diagonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V, so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ Diagonalgestalt haben.

b) Sind f und g trigonalisierbar, so sind sie simultan trigonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V, so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 2

Setze für $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(X \cdot E_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X], \\ \eta_A(X) &= \det(E_n - X \cdot A) = 1 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

a) Gib Formeln an, mit denen man die a_i aus den b_j (und umgekehrt) berechnen kann.

Sei im folgenden A trigonalisierbar.

b) Zeige, dass eine positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Reihe

$$S_A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Spur}(A^{j+1}) \cdot x^j$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < c$ absolut konvergiert, und für diese x gilt (falls $\eta_A(x) \neq 0$):

$$S_A(x) = -\frac{\eta_A'(x)}{\eta_A(x)}.$$

(Es bezeichne η_A' die Ableitung von η_A nach x.)

c) Leite aus b) eine Formel her, mit der man die a_i $(0 \leq i < n)$ aus den Zahlen $n = \mathrm{Spur}(A^0), \mathrm{Spur}(A^1), \ldots, \mathrm{Spur}(A^n)$ rekursiv berechnen kann.

d) Leite aus b) eine Formel her, mit der man aus den a_i $(0 \leq i < n)$ die Zahlen $\mathrm{Spur}(A^j)$ für alle $j \geq 1$ berechnen kann.

(*Hinweis zu c) und d):* Multipliziere die Gleichung in b) auf beiden Seiten mit $\eta_A(x)$, fasse dann beide Seiten als Potenzreihen in x auf und führe einen Koeffizientenvergleich durch. Benutze dann a).)

Aufgabe 3

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

a) Seien $\varphi\colon V \longrightarrow V$ und $\psi\colon V \longrightarrow V$ lineare Abbildungen mit $\psi \circ \varphi = 0$, $\varphi \circ \psi = 0$. Zeige, dass eine Gerade (d.h. ein eindimensionaler Unterraum) $L \subseteq V$ existiert, so dass $\varphi(L) \subseteq L$ und $\psi(L) \subseteq L$.

b) Seien $\varphi_i\colon V \longrightarrow V$ und $\psi_i\colon V \longrightarrow V$, $i = 1, 2$, lineare Abbildungen mit $\psi_i \circ \varphi_i = 0$, $\varphi_i \circ \psi_i = 0$, $i = 1, 2$. Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, 2$, so dass

$$\varphi_1(L_1) \subseteq L_2,\ \psi_1(L_2) \subseteq L_1,\ \varphi_2(L_2) \subseteq L_1,\ \psi_2(L_1) \subseteq L_2.$$

Das läßt sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
L_1 \subseteq V \arrow[r, bend left, shift left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, shift left, "\psi_2"] & V \supseteq L_2 \arrow[l, bend right, shift left, "\psi_1"] \arrow[l, bend left, shift left, "\varphi_2"]
\end{tikzcd}$$

Die Geraden L_1 und L_2 sollen dabei unter den eingezeichneten Abbildungen ineinander abgebildet werden.

c) Sei nun $N \geq 1$ eine ganze Zahl, seien $\varphi_i\colon V \longrightarrow V$ und $\psi_i\colon V \longrightarrow V$, $i = 1, \ldots, N$, lineare Abbildungen mit

$$\psi_i \circ \varphi_i = 0, \quad \varphi_i \circ \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (*)$$

Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, \ldots, N$, so dass

$$\begin{aligned}
&\varphi_i(L_i) \subseteq L_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, N-1, \\
&\psi_i(L_{i+1}) \subseteq L_i \text{ für } i = 1, \ldots, N-1, \\
&\varphi_N(L_N) \subseteq L_1,\ \psi_N(L_1) \subseteq L_N.
\end{aligned}$$

Die Abbildungen φ_i, ψ_i lassen sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & V \arrow[dll, shift left, "\psi_N"] \arrow[drr, shift left, "\varphi_1"] & & & \\
 & V \arrow[urr, shift left, "\varphi_N"] \arrow[dl, dotted, no head] & & & & V \arrow[ull, shift left, "\psi_1"] \arrow[dr, shift left, "\varphi_2"] & \\
 {} & & & & & & V \arrow[ul, shift left, "\psi_2"] \arrow[d, dotted, no head] \\
 & & & & & & {}
\end{tikzcd}$$

In jeder im Diagramm erscheinenden Kopie von V ist dann eine Gerade zu finden, so dass diese Geraden unter den Abbildungen φ_i, ψ_i ineinander abgebildet werden.

Bemerkung: Eine Variante dieser Aufgabe wird benutzt in dem Artikel *On the existence of F-crystals* von R. Kottwitz und M. Rapoport, siehe Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 1, 153–184. Der dort gegebene Beweis benutzt allerdings Methoden der algebraischen Geometrie.