Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 8

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und V der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Sei $A \in V$ eine feste 2×2-Matrix. Die lineare Abbildung $L_A \colon V \longrightarrow V$ sei definiert durch $X \mapsto AX - XA$.

a) Durch welche Matrix wird L_A bezüglich der Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von V beschrieben, wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist?

b) Berechne $\dim(\operatorname{im} L_A)$ und $\dim(\ker L_A)$ in Abhängigkeit von der Matrix A.

c) Gib im Fall $L_A \neq 0$ eine Basis von $\ker L_A$ an.

d) Gib einen von A unabhängigen dreidimensionalen Unterraum $W \subseteq V$ an, so dass $\operatorname{im} L_A \subseteq W$ für alle $A \in V$ gilt.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper, und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $GL_n(K)$ Untergruppen sind.

a) $D = \{A = (a_{ij}) \in GL_n(K);\ a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j\}$

b) $D' = D \cup \{A = (a_{ij}) \in GL_n(K);\ a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq n - j + 1\ \}$

c) $G = \{A = (a_{ij}) \in GL_n(K);\ a_{ii} = 1 \text{ für alle } i\}$

d) $O = \{A \in GL_n(K);\ A \cdot {}^tA = E_n\}$

e) Nun sei $K = \mathbb{Q}$. Ist $H = \{A = (a_{ij}) \in GL_n(K);\ a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$ eine Untergruppe von $GL_n(K)$?

Aufgabe 7

a) Sei G eine endliche, nicht-leere Menge und $\cdot$ eine assoziative Verknüpfung auf G. Für jedes $a \in G$ seien die Abbildungen $l_a \colon G \longrightarrow G$, $g \mapsto a \cdot g$, und $r_a \colon G \longrightarrow G$, $g \mapsto g \cdot a$, injektiv. Zeige, dass dann $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

b) Sei p eine Primzahl. Für eine natürliche Zahl n bezeichne $\overline{n}$ den Rest von n bei Division durch p. Auf der Menge $F_p := \{0, \ldots, p-1\} \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir Verknüpfungen $+_p$ und $\cdot_p$ durch

$$n +_p m := \overline{n + m}, \quad n \cdot_p m := \overline{nm}, \quad n, m \in F_p.$$

Zeige, dass F_p mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.

Aufgabe 8

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, und sei $n \geq 1$.

a) Bestimme die Anzahl der Elemente von K^n.

b) Bestimme die Anzahl der Elemente von $GL_n(K)$.