Prof. Dr. Michael Rapoport **WS 2006/07**
Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 19, Vorträge am 01.02.2007

Aufgabe 48

a) Seien $n \geq 0$, k ein Körper und $G = GSp_{2n}$ die Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten über k bezüglich der symplektischen Form auf $V = k^{2n}$ mit $(e_i, e_{2n-i+1}) = 1$ für $1 \leq i \leq n$, $= -1$ für $n+1 \leq i \leq 2n$, $(e_i, e_j) = 0$ sonst. Sei $T \subset G$ der Diagonaltorus. Sei μ die 1-Parameter-Untergruppe $\mathbb{G}_m \longrightarrow T \subset G$, $z \mapsto (z, \dots, z, 1, \dots, 1)$.

Bestimme den zu μ gehörigen Anstiegsmorphismus $\mathbb{D} \longrightarrow G_{\text{tor}}$.

b) Sei nun $\operatorname{char} k \neq 2$, sei k'/k eine quadratische Körpererweiterung, und $G = GU$ die Gruppe der unitären Ähnlichkeiten, d. h.

$$G(R) = \{g \in GL_n(R \otimes_k k');\ {}^t\bar{g}g = c \cdot \text{id für ein } c \in R^\times\}$$

für jede k-Algebra R (vgl. Aufgabe 47 b)).

Bestimme den Basiswechsel $G_{k'}$ und den Torus-Anteil G_{tor}. Sei μ eine 1-Parameter-Untergruppe von $G_{k'}$. Bestimme den zu μ gehörigen Anstiegsmorphismus.

Aufgabe 49

Seien n, k, G und μ wie in Aufgabe 48 a).

a) Beschreibe die parabolische Untergruppe $P_\mu \subset G$ und zeige, dass man G/P_μ identifizieren kann mit dem Raum aller maximal total isotropen Unterräume von k^{2n}.

b) Sei K ein Erweiterungskörper von k. Zeige, dass ein Element $\mathcal{F} \in (G/P_\mu)(K)$ genau dann semistabil ist, wenn für alle total isotropen k-Unterräume $W_0 \subset V$ gilt:

$$\dim \mathcal{F} \cap (W_0 \otimes K) \leq \frac{1}{2} \dim W_0.$$