

Vortragsliste für das Seminar

# Algebraische Kurven

— Sommersemester 2005, Do 14–16, SR D —

1. **Algebraische Kurven** ([Ha] I.6, [Se1] II §1+§2). Definition einer regulären, eigentlichen, geometrisch zusammenhängenden Kurve  $X/k$ , Funktionenkörper  $K(X)$ , abgeschlossene Punkte entsprechen diskreten  $k$ -Bewertungsringen von  $K(X)$ , Fortsetzungslemma: rationale Funktionen auf  $X$  mit Werten in einer projektiven Varietät sind überall regulär, nichtkonstante Elemente des Funktionenkörpers entsprechen endlichen Abbildungen nach  $\mathbb{P}_k^1$ , Dedekind-Weber Äquivalenz von Kurven und Funktionenkörpern. Struktur der komplettierten lokalen Ringe ( $k$  perfekt).
2. **Divisoren, Linienbündel und Differentiale** ([Ha] II.6+8, [Se1] II §3+§9). Auf Kurven: Divisoren, Linienbündel, Linienbündel zu einem Divisor, Hauptdivisoren. Jede nichtkonstante Abbildung zwischen Kurven ist endlich, Verzeigungsindizes, Fundamentale Gleichung (der Fasern), Divisorklassengruppe, Norm und Inklusion für Divisoren entlang Abbildungen zwischen Kurven [Se2] I §4+§5, Grad eines Divisors & Linienbündels, Grad von Hauptdivisoren = 0. Derivationen, Differentiale, die Garbe  $\Omega_{X/k}$ , für perfekte  $k$ : die Halme von  $\Omega_{X/k}$  in abg. Punkten  $x$  sind frei vom Rang 1 mit Basis  $dt$  für eine Uniformisierende  $t$  in  $x$ , rationale Differentiale, Geschlecht, kanonische Klasse.
3. **Repartitionen und Kohärenzsatz** ([Ha] IV.1, [Se1] II §4+§5), [Fu] VIII.2, [Sx]). Definition: Repartitionen  $R$ , Repartitionen mit beschränkten Nennern  $R(D)$ ,  $I(D) = R/R(D) + K(X)$ ,  $l(D)$  und  $i(D)$ . Die 5-Term-Sequenz, Kohärenzsatz:  $l(D)$  und  $i(D)$  sind endlich, siehe [Sx]. Erste Form des Satzes von Riemann-Roch: Eulercharakteristik.
4. **Abstrakte Residuen** ([Ta] §1-§3). Endlichpotente lineare Abbildungen, Spur von solchen, Existenzsatz für abstrakte Residuen, Residuen auf Kurven, Residuen und Laurentreihen [Ta] Thm 2.
5. **Residuensatz und Adjunktionsformel** ([Ta] §1-§3, [Se1] II §12 Lemme 4+5). Residuensatz [Ta] §3 Thm 3 & Cor, Adjunktionsformel [Ta] §3 Thm 4.
6. **Dualität und Riemann-Roch** ([Se1] II §6+§8+§9, [Ha] IV.1 Ex 1.1-1.3). Stetiges dual  $J = \bigcup J(D)$ , Dimension von  $J$  über  $K(X)$ , Residuenpaarung, Dualitätssatz, endgültiger Riemann-Roch für Linienbündel auf Kurven, Folgerungen aus Riemann-Roch: echte offene Teile von Kurven sind affin.
7. **Riemann-Hurwitz-Formel** ([Ha] IV.1+2). Grad der kanonischen Klasse, Eindeutigkeit der kanonischen Klasse als ‘dualisierender Divisor’ im Satz von Riemann-Roch, Kurven

vom Geschlecht 0 mit rationalem Punkt sind isomorph zu  $\mathbb{P}_k^1$ . Vergleich der Differentialgarben entlang einer verzweigten Überlagerung von Kurven, Riemann-Hurwitz-Formel, Frobenius, Lüroths Theorem, der  $\mathbb{P}_k^1$  ist einfach zusammenhängend.

8. **Hyperelliptische Kurven und kanonische Einbettung** ([Ha] IV.1+4+5, [GH] p.253-258). Elliptische Kurven ( $g = 1$  und rationaler Punkt) erfüllen eine Legendregleichung  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$  [Ha] IV.4.6 mit globalem Differential  $dx/y$  und haben triviale kanonische Klasse [Ha] IV.1.3.6. Linienbündel und Abbildungen in den  $\mathbb{P}^n$ , Definition  $g_d^r$ , Definition einer hyperelliptischen Kurve, in Charakteristik  $\neq 2$ : Gleichung  $y^2 = f(x)$  und globale Differentiale  $x^i dx/y$ , Diskussion des kanonischen Linearsystems [Ha] IV.5.1-5.3, hyperelliptische Involution.
9. **Cliffords Theorem und das Theorem über allgemeine Lage** ([Ha] Thm IV.5.4, [Go] §1+§3, [ACGH] III §1). Cliffords Lemma, Cliffords Theorem, das Theorem über allgemeine Lage.

## Literatur

- [ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves*, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **267**, 1985.
- [Fu] Fulton, W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York, 1969.
- [GH] Griffiths, P. A., Harris, J., *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [Go] Gordon, W. J., A linear algebra proof of Clifford's theorem, *Enseign. Math.* 2 **30** (1984), no. 1-2, 85–94.
- [Ha] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer, GTM **52**, 1977.
- [Se1] Serre, J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.
- [Se2] Serre, J.-P., *Local fields*, Springer, GTM **67**, 1979.
- [Sx] Stix, J., Notizen zu Residuen, Dualität und Riemann-Roch auf Kurven.
- [Ta] Tate, J., Residues of differentials on curves, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **1**, 4 (1968), 149–159.