Einführung in die Algebra — Übungsblatt 12

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 18. Januar 2018, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (4 Punkte = 2 + 2)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\!\!/\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung ist, wobei p eine Primzahl ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})/\!\!/\mathbb{Q}$ *keine* normale Körpererweiterung ist, wenn $n \geqslant 3$ (und p wieder eine Primzahl).

Aufgabe 2. (7 Punkte = 5 + 1 + 1)

Seien $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $K \subseteq L \subseteq \bar{K}$ ein Zwischenkörper. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) $L/\!\!/K$ ist eine normale Körpererweiterung.
(ii) L ist ein Zerfällungskörper einer Teilmenge $S \subseteq K[t] \smallsetminus K$ über K.
(iii) Jeder K-Körperhomomorphismus $L \to \bar{K}$ hat Bild gleich L.

Seien jetzt $M/\!\!/L$ und $L/\!\!/K$ zwei Körpererweiterungen, so dass $M/\!\!/K$ normal ist.

(a) Zeigen Sie, dass $M/\!\!/L$ auch normal ist.
(b) Geben Sie ein Beispiel für diese Situation an, in dem $L/\!\!/K$ *nicht* normal ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte = 3 + 2)

(a) Seien L ein endlicher Körper und $L/\!\!/K$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass sie normal und separabel ist.
(b) Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $a \in K$ und $f(t) = t^p - t - a \in K[t]$. Seien $L/\!\!/K$ eine Körpererweiterung und $b \in L$ eine Nullstelle von $f(t)$. Zeigen Sie, dass $f(t)$ über L in Linearfaktoren zerfällt, und beschreiben Sie diesen Zerfall explizit, indem Sie alle Nullstellen von $f(t)$ in L angeben.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Seien $M/\!\!/K$ eine algebraische Körpererweiterung und $K \subseteq L \subseteq M$ ein Zwischenkörper. Seien auch $\bar{K}$ und $\bar{L}$ algebraische Abschlüsse von K bzw. L mit $\bar{K} \subseteq \bar{L}$. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) \times \mathrm{Hom}_L(M, \bar{L}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M, \bar{K})$$

und folgern Sie, dass der Separabilitätsgrad multiplikativ ist:

$$[\![M : L]\!]_{\mathrm{sep}} \cdot [\![L : K]\!]_{\mathrm{sep}} \;=\; [\![M : K]\!]_{\mathrm{sep}}.$$