Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch

SS 2016

Algebra I

9. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei R eine k-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für die Krulldimension

$$\dim(R) \;=\; \mathrm{Max}_{\mathfrak{p}}\{\dim(R/\mathfrak{p})\}$$

gilt, wobei das Maximum über alle minimalen Primideale genommen wird.

Aufgabe 2:

Sei k ein Körper, und sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i) $\dim(A) = 0$;

ii) A ist ein endlichdimensionaler k-Vektorraum;

iii) $\mathrm{Spec}(A)$ ist endlich;

iv) $\mathrm{Max}(A)$ ist endlich.

Aufgabe 3:

Sei R eine nullteilerfreie k-Algebra von endlichem Typ und $f \in R \setminus \{0\}$ nicht invertierbar. Zeige, dass

$$\dim(R/(f)) = \dim(R) - 1.$$

Tipp: Verwende die komplizierte Form des Noetherschen Normalisierungssatzes, um einen Polynomring $S := k[T_1, \ldots, T_n] \subset R$ mit $(f) \cap S = (T_1, \ldots T_d)$ zu finden. Zeige dann dass $d = 1$. Eine Möglichkeit dafür ist die Verwendung der Relation

$$f \mid T_i \text{ in } R \Rightarrow N(f) \mid T_i^r \text{ in } S,$$

wobei r (bzw. N) den Grad (bzw. die Norm) der Körpererweiterung $\mathrm{Quot}(R)/k(T_1, \ldots, T_n)$ bezeichnet.

Aufgabe 4:

Sei k ein Körper.

i) Gib unendlich viele Primideale der Höhe 1 in $k[T_1, T_2]$ an, die in (T_1, T_2) enthalten sind.

ii) Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ, und sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ von Höhe ≥ 2. Zeige die Existenz von unendlich vielen $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ von Höhe 1 mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Tipp: Reduziere zunächst auf den Fall $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ und A nullteilerfrei. Verwende dann die komplizierte Form des Noetherschen Normalisierungssatz.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 20. Juni 2016.