Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei K'/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei L/K eine beliebige Körpererweiterung.

i) Zeige, dass ein Ringisomorphismus

$$L \otimes_K K' \simeq \prod_{i=1}^{n} L_i$$

existiert, wobei die L_i endliche separable Körpererweiterungen von L sind. Zeige ferner, dass $\sum_{i=1}^{n}[L_i : L] = [K' : K]$. Was ist die Zerlegung von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$?

ii) Zeige, dass $L_i \simeq L$ für $i = 1, \ldots, n$, falls L eine normale Hülle von K' ist.

Tip: Schreibe $K' = K[X]/(f)$ mit $f \in K[X]$. Zerlege f in $L[X]$ in irreduzible Faktoren und benutze den Chinesischen Restsatz.

Aufgabe 2:

Sei R ein Ring, und sei $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

i) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M = 0$ genau dann, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM = 0$.

ii) Sei $f : M \to M'$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten R-Moduln. Ist R noethersch, so ist $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM' \subset \mathrm{Im}(f)$ und $s\ker(f) = 0$.

Aufgabe 3:

Ein Ring R heißt reduziert, falls sein Nilradikal trivial ist.

i) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) Der Ring R ist reduziert.

b) Der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ ist reduziert für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$.

c) Der Ring $R_{\mathfrak{m}}$ ist reduziert für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

ii) Sei R reduziert, und sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal. Zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring. Für ein Ideal $I \subset R$ bezeichne $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ die Verschwindungsmenge von I. Die $V(I)$ für $I \subset R$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen der Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$.

i) Sei $f \in R$. Zeige, dass es einen kanonischen Homöomorphismus

$$\mathrm{Spec}(R_f) \xrightarrow{\simeq} D(f)$$

gibt, wobei $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$ das offene Komplement zu $V(f)$ bezeichnet.

ii) Sei $f \in R$. Zeige, dass der Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} R[X]/(fX-1) &\longrightarrow R_f \\ X &\longmapsto \frac{1}{f} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist R_f eine R-Algebra von endlichem Typ.

iii) Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeige, dass das Bild von $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$ unter der kanonischen Abbildung $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(R)$ genau der Durchschnitt aller offenen Umgebungen von $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist.

iv) Gib ein Beispiel dafür an, dass eine Lokalisierung eines Rings R im allgemeinen keine R-Algebra von endlichem Typ ist.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 09. Mai 2016.