Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

Probeklausur

Hinweise:

- In the actual exam, there will also be an English version.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Auf der folgenden Webseite befinden sich zwei Altklausuren samt Lösungsskizzen: http://www.math.uni-bonn.de/people/richarz/algebra/

Aufgabe 1:

Sei A ein Ring mit Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ und seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subseteq A$ Primideale. Zeige, dass $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_2$, falls $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$.

Aufgabe 2:

Sei A ein reduzierter Ring und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein minimales Primideal. Zeige, dass die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3:

Sei A ein Ring und sei M ein A-Modul.
i) Zeige, dass M flach über A ist, falls M frei ist.
ii) Gib ein Beispiel eines Ringes A und eines flachen Moduls M an, der nicht frei ist.

Aufgabe 4:

Bestimme die Dimension der folgenden Ringe.
i) $\mathbb{Z}[i]$;
ii) $k[X] \otimes_k k[Y]$, k Körper;
iii) $\mathbb{Q}[U,V,W]/(W^2 - VW + U)$.

Aufgabe 5:

Bestimme den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ im Körper $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, wobei ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel bezeichne.

Aufgabe 6:

Sei A ein Ring und sei $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in A[\![X]\!]$ eine Potenzreihe. Zeige folgende Aussagen.
i) Falls f nilpotent ist, so sind auch alle Koeffizienten a_i nilpotent.
ii) Falls A noethersch ist und alle Koeffizienten a_i nilpotent sind, so ist auch f nilpotent.