Topologie und Geometrie

Schüler*innentag im Rahmen des 25. Forum Begabungsförderung Mathematik

Laurent Côté

23. März 2024

Was machen Mathematiker?

Was machen Mathematiker?

Wir machen viele schöne Dinge. . .

Was machen Mathematiker?

Wir machen viele schöne Dinge. . .

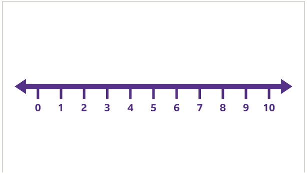
Wir interessieren uns insbesondere für:

Wir interessieren uns insbesondere für:

1. Zahlen

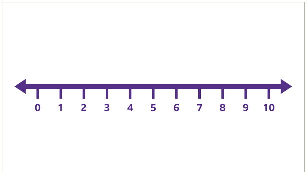
Wir interessieren uns insbesondere für:

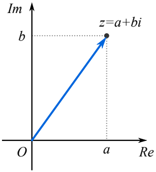
1. Zahlen



Wir interessieren uns insbesondere für:

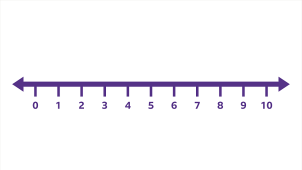
1. Zahlen

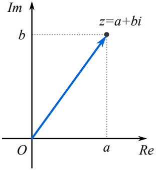




Wir interessieren uns insbesondere für:

1. Zahlen

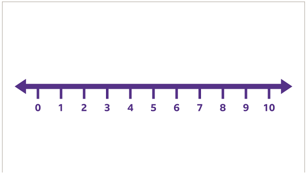


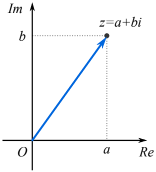


2. Räume

Wir interessieren uns insbesondere für:

1. Zahlen

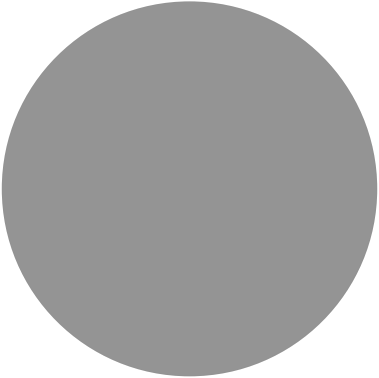




2. Räume

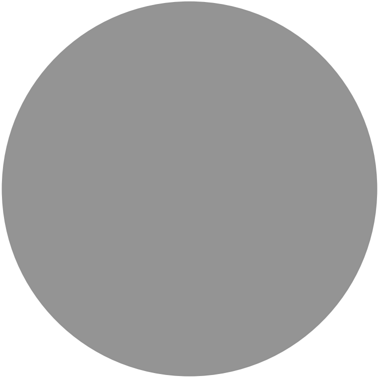
Das Thema dieses Vortrags sind Räume.

Beispiel (1): die Kreisscheibe



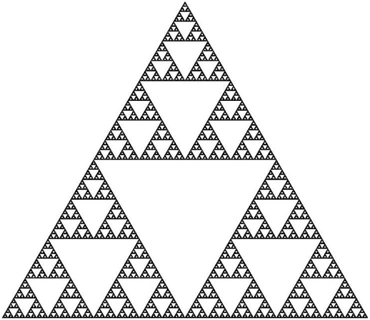
$$\{x_1^2 + x_1^2 \leq 1\}.$$

Beispiel (3/2): der n-dimensionale Ball

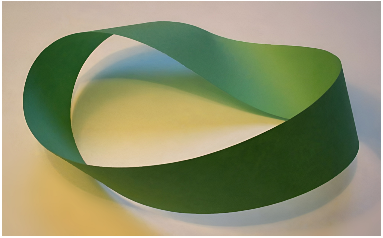


$$\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

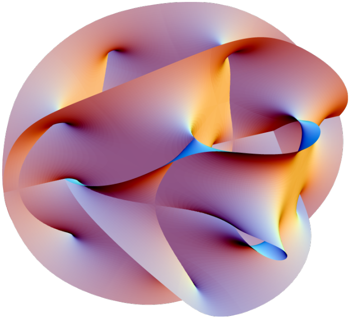
Beispiel (2): das Sierpinski-Dreieck



Beispiel (3): das Möbius-Band



Beispiel (4): eine Calabi–Yau Manigfaltigkeit



Die möglicherweise wichtigsten von Mathematikern untersuchten Räume heißen “‘Mannigfaltigkeiten”.

Die möglicherweise wichtigsten von Mathematikern untersuchten Räume heißen "'Mannigfaltigkeiten".

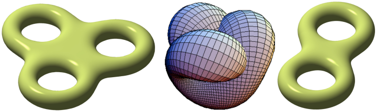
Beispiel

Der Ball, Die Calabi–Yau Manigfaltigkeit; das Möbius-Band.

Die möglicherweise wichtigsten von Mathematikern untersuchten Räume heißen “‘Mannigfaltigkeiten”.

Beispiel

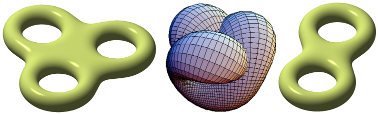
Der Ball, Die Calabi–Yau Manigfaltigkeit; das Möbius-Band.



Die möglicherweise wichtigsten von Mathematikern untersuchten Räume heißen "‘Mannigfaltigkeiten".

Beispiel

Der Ball, Die Calabi–Yau Manigfaltigkeit; das Möbius-Band.



Nicht-Beispiel

Das Sierpinski–Dreieck.

Zwei Klassen von Eigenschaften

Heute interessieren uns für die Eigenschaften der Manigfaltigkeiten.

Zwei Klassen von Eigenschaften

Heute interessieren uns für die Eigenschaften der Manigfaltigkeiten.

Manigfaltigkeiten haben gibt zwei grundlegende Klassen von Eigenschaften:

Zwei Klassen von Eigenschaften

Heute interessieren uns für die Eigenschaften der Manigfaltigkeiten.

Manigfaltigkeiten haben gibt zwei grundlegende Klassen von Eigenschaften:

- Topologie (topologische Eigenschaften)
- Geometrie (geometrische Eigenschaften)

Topologie

Topologische Eigenschaften

Was sind topologische Eigenschaften?

Topologische Eigenschaften bleiben bei kontinuierlichen Verformungen erhalten.

Topologische Eigenschaften

Was sind topologische Eigenschaften?

Topologische Eigenschaften bleiben bei kontinuierlichen Verformungen erhalten.

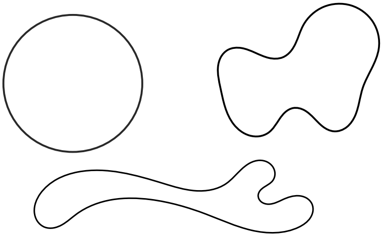
Die folgende Manigfaltigkeiten sind topologisch identisch:

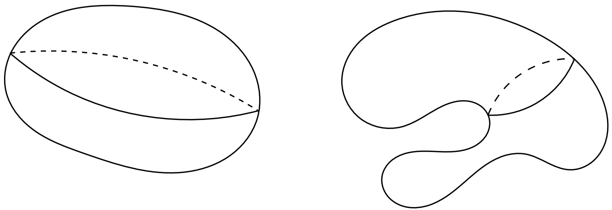
Topologische Eigenschaften

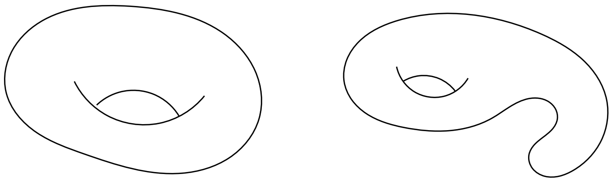
Was sind topologische Eigenschaften?

Topologische Eigenschaften bleiben bei kontinuierlichen Verformungen erhalten.

Die folgende Manigfaltigkeiten sind topologisch identisch:





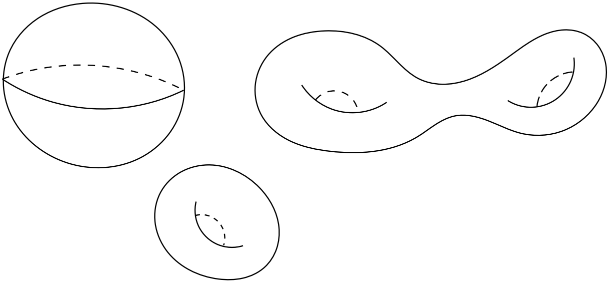


Nicht-Beispiel

Die folgende Manigfaltigkeiten sind NICHT topologisch identisch.

Nicht-Beispiel

Die folgende Manigfaltigkeiten sind NICHT topologisch identisch.



Unterschiedliche Räume

Frage

Wie kann man zeigen, dass zwei Räume topologisch unterschiedlich sind?

Unterschiedliche Räume

Frage

Wie kann man zeigen, dass zwei Räume topologisch unterschiedlich sind?

Eine Antwort

Man studiert *Schleifen*!

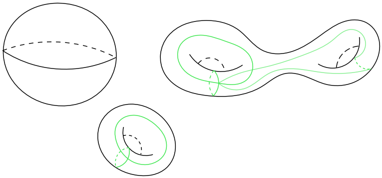
Unterschiedliche Räume

Frage

Wie kann man zeigen, dass zwei Räume topologisch unterschiedlich sind?

Eine Antwort

Man studiert *Schleifen*!

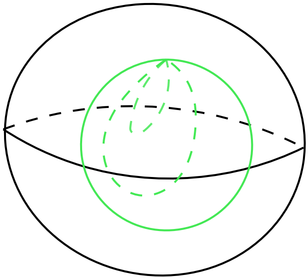


Schleifen auf der Kugel

Nehmen Sie eine beliebige Schleife in der zweidimensionalen Kugel. Dann können Sie sie kontinuierlich bis zu einem Punkt verformen.

Schleifen auf der Kugel

Nehmen Sie eine beliebige Schleife in der zweidimensionalen Kugel. Dann können Sie sie kontinuierlich bis zu einem Punkt verformen.

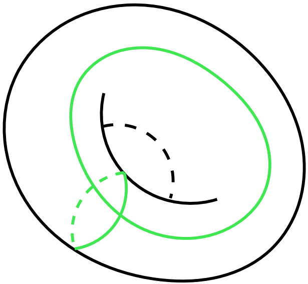


Schleifen auf dem Torus

Im Gegensatz dazu kann man auf dem Torus die folgenden Schleifen nicht zusammenziehen.

Schleifen auf dem Torus

Im Gegensatz dazu kann man auf dem Torus die folgenden Schleifen nicht zusammenziehen.

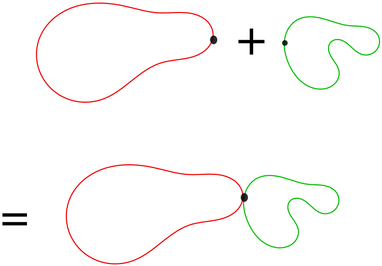


Die Fundamentalgruppe

Man kann Schleifen verketten:

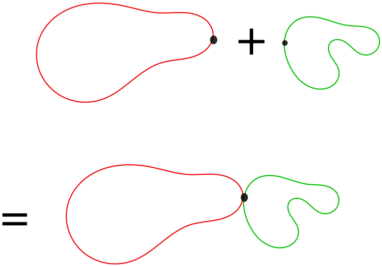
Die Fundamentalgruppe

Man kann Schleifen verketten:



Die Fundamentalgruppe

Man kann Schleifen verketten:



Diese Schleifen bilden eine algebraische Struktur, die *Fundamentalgruppe* genannt wird.

Poincaré

Die Fundamentalgruppe wurde vor mehr als hundert Jahren von einem französischen Mathematiker namens *Poincaré* eingeführt.

Klassifikation von Flächen

Fakt

2-dimensionale Mannigfaltigkeiten werden nach ihrer Fundamentalgruppe klassifiziert.

Klassifikation von Flächen

Fakt

2-dimensionale Mannigfaltigkeiten werden nach ihrer Fundamentalgruppe klassifiziert.

Wir haben gesehen:

- Die Fundamentalgruppe der zweidimensionalen Kugel besteht nur aus einem Element, da jede Schleife auf einen Punkt kontrahiert werden kann

Klassifikation von Flächen

Fakt

2-dimensionale Mannigfaltigkeiten werden nach ihrer Fundamentalgruppe klassifiziert.

Wir haben gesehen:

- Die Fundamentalgruppe der zweidimensionalen Kugel besteht nur aus einem Element, da jede Schleife auf einen Punkt kontrahiert werden kann
- Die Fundamentalgruppe des Torus hat mehrere Elemente (sogar unendliche viele), da einige Schleifen nicht kontrahiert werden können. (Tatsächlich ist diese Gruppe $\mathbb{Z}^2$)

Dimension 3

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 (und höher) ist die Klassifizierung viel komplizierter und immer noch unvollständig.

Dimension 3

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 (und höher) ist die Klassifizierung viel komplizierter und immer noch unvollständig.

Die Poincaré-Vermutung

Die einzige dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe einelementig ist, ist die 3-dimensionale Sphäre

$$S^3 = \{x_0^2 + \cdots + x_3^2 = 1\}.$$

Dimension 3

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 (und höher) ist die Klassifizierung viel komplizierter und immer noch unvollständig.

Die Poincaré-Vermutung

Die einzige dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe einelementig ist, ist die 3-dimensionale Sphäre

$$S^3 = \{x_0^2 + \cdots + x_3^2 = 1\}.$$

Dies wurde erst 2003 bewiesen, etwa hundert Jahre nachdem Poincaré die Vermutung aufgestellt hatte.

Geometrie

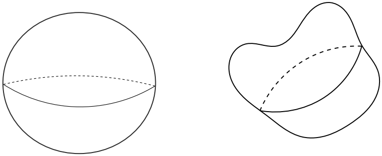
In der Geometrie interessiert man sich für starre Eigenschaften des Raums, insbesondere für die Begriffe Abstand und Winkel.

In der Geometrie interessiert man sich für starre Eigenschaften des Raums, insbesondere für die Begriffe Abstand und Winkel.

Die folgenden Mannigfaltigkeiten sind topologisch identisch, aber nicht geometrisch identisch.

In der Geometrie interessiert man sich für starre Eigenschaften des Raums, insbesondere für die Begriffe Abstand und Winkel.

Die folgenden Mannigfaltigkeiten sind topologisch identisch, aber nicht geometrisch identisch.



Typische Fragen zur Geometrie

Betrachten Sie eine beliebige Mannigfaltigkeit.

Typische Fragen zur Geometrie

Betrachten Sie eine beliebige Mannigfaltigkeit.

Frage

Wie groß ist die Winkelsumme eines Dreiecks?

Typische Fragen zur Geometrie

Betrachten Sie eine beliebige Mannigfaltigkeit.

Frage

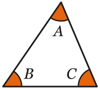
Wie groß ist die Winkelsumme eines Dreiecks?

Frage

Wählen Sie jetzt zwei Punkte. Was ist der kürzeste Weg zwischen ihnen?

Euklidische Geometrie

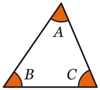
- Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt. . . 180 Grad!



$A + B + C = 180°$

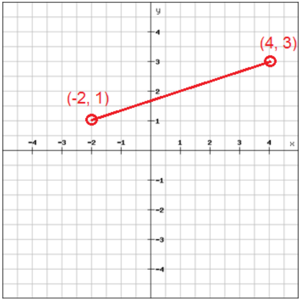
Euklidische Geometrie

- Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt. . . 180 Grad!



$A + B + C = 180°$

- Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Strecke



Die zweidimensionalen Sphäre

Geometrie auf der zweidimensionalen Sphäre

Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre. Wir wählen drei Punkte aus: den Nordpol und zwei Punkte am Äquator.

Geometrie auf der zweidimensionalen Sphäre

Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre. Wir wählen drei Punkte aus: den Nordpol und zwei Punkte am Äquator.

Frage

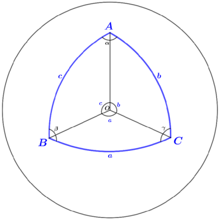
Wie groß ist die Winkelsumme dieses Dreiecks?

Geometrie auf der zweidimensionalen Sphäre

Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre. Wir wählen drei Punkte aus: den Nordpol und zwei Punkte am Äquator.

Frage

Wie groß ist die Winkelsumme dieses Dreiecks?

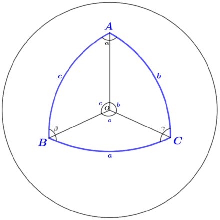


Geometrie auf der zweidimensionalen Sphäre

Betrachten Sie die 2-dimensionale Sphäre. Wir wählen drei Punkte aus: den Nordpol und zwei Punkte am Äquator.

Frage

Wie groß ist die Winkelsumme dieses Dreiecks?

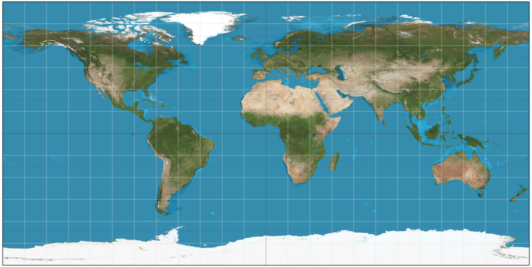


Antwort

270 Grad!

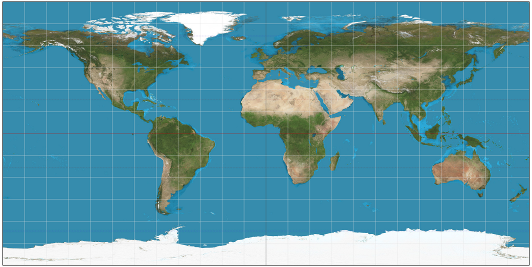
Kürzester Abstand zwischen zwei Punkten

Hier ist eine Weltkarte.



Kürzester Abstand zwischen zwei Punkten

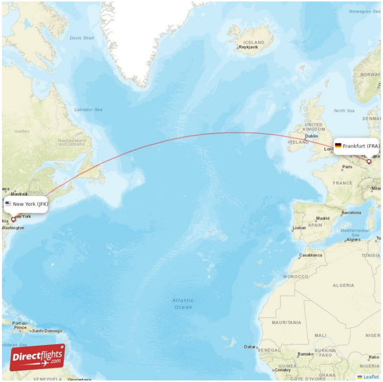
Hier ist eine Weltkarte.



Problem

Zeichnen Sie die kürzeste Entfernung vom Frankfurter Flughafen nach New York ein.

Frankfurt nach New York



Der kürzeste Weg ist keine gerade Linie!

Das liegt daran, dass die Erde rund ist!

Geodäten

Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten in einem geometrischen Raum heißt: *Geodäte*.

Geodäten

Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten in einem geometrischen Raum heißt: *Geodäte*.

- Die Geodäten im euklidischen Raum sind gerade Linien

Geodäten

Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten in einem geometrischen Raum heißt: *Geodäte*.

- Die Geodäten im euklidischen Raum sind gerade Linien
- die Geodäten auf der Kugel sind gekrümmt (insbesondere keine geraden Linien)

Geodäten

Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten in einem geometrischen Raum heißt: *Geodäte*.

- Die Geodäten im euklidischen Raum sind gerade Linien
- die Geodäten auf der Kugel sind gekrümmt (insbesondere keine geraden Linien)

Ein Flugzeug, das von Frankfurt nach New York fliegt, fliegt entlang der Geodäten, um Zeit und Treibstoffverbrauch zu optimieren. Deshalb fliegen wir über Irland und Neufundland.

Drei Geometrien

1. hyperbolische Geometrie

Drei Geometrien

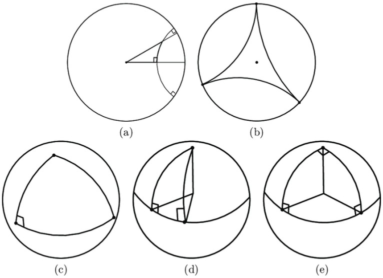
1. hyperbolische Geometrie
2. flache/euklidische Geometrie

Drei Geometrien

1. hyperbolische Geometrie
2. flache/euklidische Geometrie
3. Elliptische Geometrie

Drei Geometrien

1. hyperbolische Geometrie
2. flache/euklidische Geometrie
3. Elliptische Geometrie



Wachstum der Anzahl der Geodäten

Es gibt viele Dinge, die wir über Geometrie nicht verstehen.

Wachstum der Anzahl der Geodäten

Es gibt viele Dinge, die wir über Geometrie nicht verstehen.

Eine typische Frage

Betrachten Sie eine Mannigfaltigkeit mit hyperbolischer Geometrie. Schätzen Sie die Anzahl geschlossener Geodäten mit einer Länge von höchstens ℓ.

Wachstum der Anzahl der Geodäten

Es gibt viele Dinge, die wir über Geometrie nicht verstehen.

Eine typische Frage

Betrachten Sie eine Mannigfaltigkeit mit hyperbolischer Geometrie. Schätzen Sie die Anzahl geschlossener Geodäten mit einer Länge von höchstens ℓ.

Diese Frage ist sehr wichtig und noch lange nicht geklärt. Einer der größten Fortschritte wurde kürzlich von einer Mathematikerin namens Maryam Mirzakhani gemacht.

Wachstum der Anzahl der Geodäten

Es gibt viele Dinge, die wir über Geometrie nicht verstehen.

Eine typische Frage

Betrachten Sie eine Mannigfaltigkeit mit hyperbolischer Geometrie. Schätzen Sie die Anzahl geschlossener Geodäten mit einer Länge von höchstens ℓ.

Diese Frage ist sehr wichtig und noch lange nicht geklärt. Einer der größten Fortschritte wurde kürzlich von einer Mathematikerin namens Maryam Mirzakhani gemacht.

Das Universum

Die Topologie des Universums

Frage

Was ist die Topologie des Universums?

Die Topologie des Universums

Frage

Was ist die Topologie des Universums?

Wenn Sie in einem Raumschiff ewig geradlinig reisen könnten, würden Sie irgendwann dorthin zurückkehren, wo Sie angefangen haben?

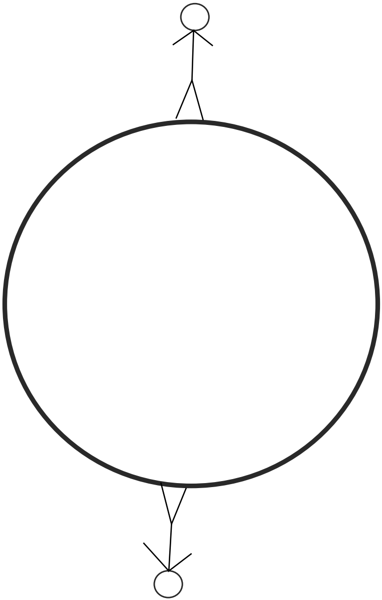
Die Topologie des Universums

Frage

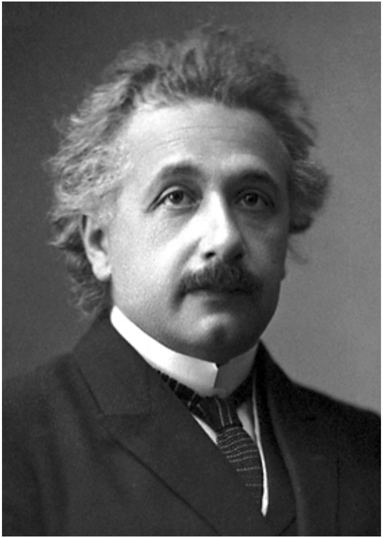
Was ist die Topologie des Universums?

Wenn Sie in einem Raumschiff ewig geradlinig reisen könnten, würden Sie irgendwann dorthin zurückkehren, wo Sie angefangen haben?

Ich kenne keinen Grund, dies zu erwarten, aber es ist eine sinnvolle Frage ...



Generelle Relativität



Die Geometrie des Universums

Frage

Was ist die Geometrie des Universums?

Die Geometrie des Universums

Frage

Was ist die Geometrie des Universums?

Physiker modellieren das Universum als Mannigfaltigkeit.

Die Geometrie des Universums

Frage

Was ist die Geometrie des Universums?

Physiker modellieren das Universum als Mannigfaltigkeit.

Sie beschreiben die Geometrie dieser Mannigfaltigkeit (unseres Universums) mithilfe einer sogenannten Metrik.

Die Geometrie des Universums

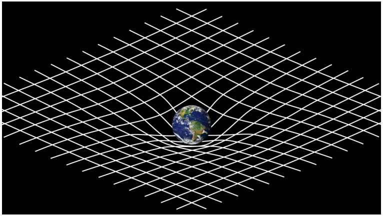
Frage

Was ist die Geometrie des Universums?

Physiker modellieren das Universum als Mannigfaltigkeit.

Sie beschreiben die Geometrie dieser Mannigfaltigkeit (unseres Universums) mithilfe einer sogenannten Metrik.

Die Bewegung eines Teilchens durch die Raumzeit ist eine Geodäte.



Einsteins Gleichungen

Die Metrik, die die Form des Universums bestimmt, muss einer Gleichung namens Einsteins Gleichung genügen

Einsteins Gleichungen

Die Metrik, die die Form des Universums bestimmt, muss einer Gleichung namens Einsteins Gleichung genügen

Einsteins Gleichung

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

wobei $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.

Einsteins Gleichungen

Die Metrik, die die Form des Universums bestimmt, muss einer Gleichung namens Einsteins Gleichung genügen

Einsteins Gleichung

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

wobei $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.

Natürlich habe ich Ihnen nicht gesagt, was diese Symbole bedeuten!

Einsteins Gleichungen

Die Metrik, die die Form des Universums bestimmt, muss einer Gleichung namens Einsteins Gleichung genügen

Einsteins Gleichung

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

wobei $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.

Natürlich habe ich Ihnen nicht gesagt, was diese Symbole bedeuten!

Dies würde viel mehr als eine Stunde dauern. Aber wenn Sie es herausfinden möchten, können Sie mehr Mathematik studieren, z. B. in ein paar Jahren an einer Universität.

Danke

Vielen Dank!

Bildnachweis: Seite ... (Treasure map):
https://www.creativefabrica.com/de/product/portrait-people-thinking-problem-solving/
Seite : https://de.wikipedia.org/wiki/
http://www.mlahanas.de/Physics/Bios/images/HenriPoincare.jpg.
Slide 36 (Kennedy Bridge, Bonn): direct flights.com
Slide 38 (The Thinker):
https://asd.gsfc.nasa.gov/blueshift/wp-content/uploads/2015/11/Spacetime_curvature.png