Metamathematische Aspekte der Hausdorffschen Mengenlehre

Peter Koepke

Zusammenfassung: Felix Hausdorff hat in seinen mengentheoretischen Untersuchungen zahlreiche Fragen berührt, die von der üblichen Axiomatisierung der Mengenlehre unabhängig sind, d.h. in dieser weder beweisbar noch widerlegbar sind. Am Beispiel der Cantorschen Kontinuumshypothese geben wir einen Eindruck von Unabhängigkeitsbeweisen mit inneren Modellen und der Erzwingungsmethode. Unabhängigkeitsresultate können als Absage an ein absolutes mengentheoretisches Universum interpretiert werden, in erstaunlicher Analogie zur Hausdorffschen Erkenntnistheorie des *Chaos in kosmischer Auslese.*

1. Einleitung

Die im Jahr 1914 erschienenen *Grundzüge der Mengenlehre* von Felix Hausdorff markieren einen Wendepunkt in der Entwicklung der Mengenlehre [H 1914]. Vier Jahrzehnte nach Georg Cantors genialer Erkenntnis, daß es verschieden große Unendlichkeiten gibt und diese der mathematischen Untersuchung zugänglich sind, präsentiert Hausdorff die Mengentheorie als umfassendes System zur Konstruktion und Analyse unendlicher Strukturen. Zurück liegt Cantors langes und schließlich erfolgreiches Ringen um die Anerkennung der Lehre vom Transfiniten. Aus der durch die Russellsche Antinomie ausgelösten Grundlagenkrise, die die Mengenlehre nochmals zutiefst in Frage gestellt hatte, zeichnen sich tragfähige Auswege ab. Kardinalzahl- und Ordnungstheorie sind weiterentwickelt worden, maßgeblich auch von Hausdorff [H 1904 – H 1908].

Hausdorff stellt diese Theorien nun in vollendeter Weise in den *Grundzügen* dar und setzt sie sogleich neuartig in anderen Bereichen ein. In wenigen, bahnbrechenden Zeilen, die alle Gebiete der Mathematik beeinflußt haben, definiert er den Begriff des *topologischen Raumes* [H 1914, S. 213]. Das berühmte Hausdorffsche Paradoxon finden wir in den Ausführungen zur Maßtheorie [H 1914, S. 469 ff.]. Hausdorffs Buch, das für Jahre zum wichtigsten Lehrbuch der Mengentheorie wird, ist ein entscheidender Schritt zur modernen, mengentheoretisch und axiomatisch begründeten Mathematik.

Hausdorff legt den naiven Cantorschen Mengenbegriff zugrunde und behandelt Mengen – ähnlich den Zahlen oder geometrischen Strukturen – als unmittelbar erfaßte mathematische Objekte. Cantors tastende, teilweise philosophisch beeinflußte Definitionen des Mengenbegriffs haben sich als richtig erwiesen, und so kann Hausdorff, der die *Grundzüge* dem „Schöpfer der Mengenlehre, Herrn Georg Cantor, in dankbarer Verehrung" widmet, seine Darstellung einfach und selbstbewußt mit der Feststellung beginnen:

> *„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding."* [H 1914, S. 1]

Nur wenige Bemerkungen verwendet Hausdorff auf Grundlagenfragen der Mengenlehre oder auf deren Bedeutung für die Grundlegung der Mathematik. Daß sich die gewohnten Zahlsysteme auf Mengen reduzieren lassen und daß der Mathematiker ständig mit unendlichen Zusammenfassungen arbeitet, wird vorausgesetzt [H 1914, S. 47 bzw. S. 1 f.]. In der Gewißheit, daß der axiomatische Ansatz von Ernst Zermelo [Ze 1908] die bekannten Antinomien vermeidet und der Cantorschen Mengenlehre angemessen ist, kann Hausdorff „den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber tatsächlich die Beschränkungen innehalten, die den Weg zu jenen Paradoxien abschneiden" [H 1914, S. 2]. Geschickt wird der Leser so an den Klippen zu großer, widersprüchlicher Mengenbildungen vorbeigeführt.

Gerade Hausdorff aber ist in seinen konsequenten Abstraktionen und Verallgemeinerungen auch solchen Fragen begegnet, deren Klärung mit naiven Methoden prinzipiell unmöglich ist. Die Identifikation und Analyse derartiger Situationen erfordert die exakte Festlegung der Grundannahmen und Beweismethoden der Mengenlehre. Die Logik der Mengenlehre wird selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen, und mit den *metamathematischen*[1] Techniken der axiomatischen Mengenlehre ist es gelungen, die Unabhängigkeit gewisser Hypothesen von der üblichen Axiomatisierung zu beweisen.

Hausdorff erahnt bereits die Möglichkeit von Unvollständigkeiten unseres Mengenbegriffs. In der Diskussion der zuerst von Hausdorff [H 1908, S. 443 f.] betrachteten, heute als *schwach unerreichbar* bezeichneten Kardinalzahlen sagt Hausdorff:

> *„Wenn es also reguläre Anfangszahlen mit Limesindex gibt (und es ist bisher nicht gelungen, in dieser Annahme einen Widerspruch zu entdecken), so ist die kleinste unter ihnen von einer so exorbitanten Größe, daß sie für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen wird."* [H 1914, S. 131]

[1] Der Begriff der *Metamathematik* geht auf David Hilbert zurück: „Zu dieser eigentlichen Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine *Metamathematik*, hinzu, die zur Sicherung jener dient, indem sie sie vor dem Terror der unnötigen Verbote sowie der Not der Paradoxien schützt." [Hi 1922, S. 174]

In den *Grundzügen einer Theorie der geordneten Mengen* [H 1908, S. 444] schreibt Hausdorff andererseits über dieselben Zahlen:

> *„Die Existenz einer solchen Zahl ξ erscheint hiernach mindestens problematisch, muß aber in allem Folgenden als Möglichkeit in Betracht gezogen werden.“*

Somit könnte der Existenz von ξ ein ähnlicher Status zukommen, wie dem Parallelenaxiom innerhalb der Geometrie.

Dies ist von der modernen Entwicklung[2] im wesentlichen bestätigt worden. Wir verfügen über Unabhängigkeitsbeweise für ein breites Spektrum von Fragen der Mathematik unendlicher Strukturen. So läßt sich insbesondere die Cantorsche Kontinuumshypothese nicht im Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem ZFC entscheiden, das als Formalisierung des naiven Mengenbegriffs allgemein akzeptiert ist. Das System ZFC ist gleichermaßen mit der Kontinuumshypothese wie mit ihrer Negation verträglich.

Vom Standpunkt einer „platonistischen“ Metaphysik, nach der „Ideen“ und damit alle mathematischen Objekte eine absolute Existenz haben, sind die mengentheoretischen Unabhängigkeitsresultate nicht befriedigend. Im platonischen Universum, in dem der „working mathematician“ in der Regel arbeitet (oder zu arbeiten glaubt), ist die Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch, und die Mengentheorie sollte diese einfachste offene Frage der Kardinalzahlarithmetik entscheiden. Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese aber bedeutet wegen des umfassenden Charakters der mengentheoretischen Axiome die wahrscheinlich endgültige Unentscheidbarkeit dieses Problems. Die Idee einer absoluten mathematischen Welt ist in Frage gestellt.

Hier nun bietet sich eine erstaunliche Analogie zur *Philosophie* Felix Hausdorffs. Under dem Pseudonym *Paul Mongré* veröffentlicht Hausdorff im Jahr 1898 die Schrift *Das Chaos in kosmischer Auslese – ein erkenntnisskritischer Versuch* [H 1898], die eine radikale Abkehr von jeder Metaphysik vertritt: Unsere Sinneseindrücke sind mit einer Vielzahl (physikalischer) Weltmodelle verträglich und erklärbar, das Bewußtsein wählt unter diesen ein Modell (einen „Kosmos“) nach pragmatischen, traditionellen oder ästhetischen Gründen aus, ohne daß dem gewählten System eine absolute Realität beizumessen wäre. Ebenso können wir mengentheoretische Axiomensysteme als Kosmen auffassen, die aus dem Chaos des naiven Mengenbegriffs „ausgelesen“ werden, und die nicht allein, sondern allenfalls in ihren Verschiedenheiten und Wechselbeziehungen ein Bild der Mengenidee und des mathematischen Universums ergeben.

Im vorliegenden Aufsatz möchte ich die Entwicklung der Mengenlehre bis zum „mengentheoretischen Relativismus“ an Hand von Fragen nachzeichnen, die Hausdorff untersucht hat und die weiterhin im Zentrum der Forschung stehen. Auf einen kurzen Abriß der naiven Mengenlehre (Kap. 2) folgt ihre Formalisierung in der

[2] Umfassende Einführungen in die axiomatische Mengenlehre bieten die Lehrbücher von F. Drake [Dr 1974], T. Jech [Jh 1978], A. Kanamori [Ka 1994] und K. Kunen [Ku 1980].

Prädikatenlogik erster Stufe (Kap.3). Am Beispiel der Cantorschen Kontinuumshypothese lassen sich die Grundideen der Unabhängigkeitsbeweise von Gödel und Cohen skizzieren (Kap. 4). Unabhängigkeitsresultate im Bereich der definierbaren Mengen reeller Zahlen finden sich in der deskriptiven Mengenlehre (Kap.5). Nach einer Diskussion der Vielzahl mengentheoretischer Möglichkeiten und ihrer mathematischen Bedeutung (Kap.6) erfolgt schließlich ein Brückenschlag zur Hausdorffschen Erkenntnistheorie (Kap. 7).

Es sei betont, daß sich der Gedankengang dieses Aufsatzes allenfalls indirekt auf Hausdorff berufen darf. Hausdorff hat, bei allem Respekt vor dem Zermeloschen Ansatz, logische und metamathematische Betrachtungen strikt vermieden. Die Verbindung zur Philosophie beruht darauf, daß sich, sicherlich entgegen Hausdorffs Hoffnungen, in der Mathematik Schwierigkeiten bei der Erfassung des Unendlichen ergeben, wie sie in ähnlicher Weise von Hausdorff – Paul Mongré bei der Erkenntnis der physikalischen Welt gesehen werden.

2. Grundzüge der Mengenlehre

Die Mengenlehre geht zurück auf Georg Cantors überraschende Entdeckung, daß es wesentlich mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen gibt [Ca 1874]: mit Hilfe eines *Diagonalschlusses* läßt sich zu jeder Folge $(r_n)_{n \in \mathcal{N}}$ von reellen Zahlen eine weitere Zahl konstruieren, die nicht unter den r_n vorkommt. Ein besonders einfaches, auf der Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen beruhendes Argument findet sich beispielsweise bei Hausdorff [H 1914, S. 64].

Zur Zeit Cantors hätte es nahe gelegen, hierin ein weiteres Paradoxon des Unendlichen zu sehen und zu schließen, daß die natürlichen und die reellen Zahlen keine abgeschlossenen Gesamtheiten bilden, sondern *potentielle* Unendlichkeiten sind, die in unendlichem, niemals abgeschlossenen Wachstum begriffen sind. Cantors historischer Schritt bestand darin, die Mengen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ der natürlichen und reellen Zahlen als vollendete, *aktual unendliche* Zusammenfassungen zu akzeptieren, die als vollwertige mathematische Objekte in weiteren Argumenten und Konstruktionen verwendet werden können. Der Satz von Cantor besagt dann, daß es keine Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ geben kann; die Menge $\mathcal{R}$ der reellen Zahlen ist *überabzählbar* und von echt größerer *Kardinalität* als $\mathcal{N}$.

Im Mittelpunkt der Untersuchungen Cantors steht die Bestimmung überabzählbarer Kardinalitäten. Überabzählbare Mengen lassen sich nicht durch die natürlichen Zahlen abzählen, aber Cantor gelingt eine Verallgemeinerung der Zahlenfolge ins „Transfinite". Wir wollen die *Ordinalzahlen*, diese „geniale Schöpfung G. Cantors" [H 1914, S. 112], in Anlehnung an die *Grundzüge der Mengenlehre* darstellen.

Die Funktion der Zahlenreihe „als Instrument zum Zählen knüpft sich an eine [...] spezielle Eigenschaft, daß nämlich, wenn man bis n gezählt hat, nunmehr eine nächstfolgende Zahl $n + 1$ an die Reihe kommt" [H 1914, S. 101]. Die geordnete Menge der natürlichen Zahlen hat die „Beschaffenheit, daß bei jeder Zerlegung

$A = P + Q$ das Endstück Q (falls es Elemente enthält) ein *erstes* Element hat“ [a.a.O.], wobei $A = P + Q$ bedeutet, daß A disjunkt in ein Anfangsstück P und ein Endstück Q aufgeteilt wird. Man sagt, daß eine geordnete Menge A mit dieser „Beschaffenheit“ *wohlgeordnet* ist.

Durch Erweiterung des Wohlordnungsprinzips von den natürlichen Zahlen ins Unendliche gelangt man zu der Klasse Ord der Ordinalzahlen in ihrer natürlichen Anordnung $<$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega, \ldots, \alpha, \alpha + 1, \ldots .$$

(Das Symbol) ω ist die kleinste verallgemeinerte Zahl, die auf die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ folgt; $\omega{+}1$ ist der unmittelbare Nachfolger von ω, $\omega{+}2$ derjenige von $\omega{+}1$, usw.; $\omega + \omega$ bezeichnet die kleinste Zahl, die größer als $0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$ ist, usw. Allgemein ist $\alpha + 1$ der unmittelbare Nachfolger von α; Ordinalzahlen, die > 0 sind und keine *Nachfolger* sind, heißen *Limesordinalzahlen.*

Nach Johann von Neumann [vN 1923] kann man diesen „Prozeß“ im Rahmen des Mengenuniversums einfach formalisieren. Die Position der Ordinalzahl α in der $<$-Ordnung ist bestimmt durch das Anfangsstück aller kleineren Zahlen, und von Neumann identifiziert die Zahl α mit ihrer Vorgängermenge:

$$\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}.$$

Die Ordnung der Ordinalzahlen wird dann zur Elementbeziehung:

$$\beta < \alpha \quad \text{gdw.} \quad \beta \in \alpha \ .$$

Beispielsweise ist

$0 = \{\beta | \beta < 0\} = \emptyset$ die *leere Menge*;
$1 = \{\beta | \beta < 1\} = \{0\}$ ist die einelementige Menge mit dem Element 0;
$2 = \{\beta | \beta < 2\} = \{0, 1\}$ ist die ungeordnete *Paarmenge* von 0 und 1;
...
$\omega = \{\beta | \beta < \omega\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist die Menge $\mathcal{N}$ der *natürlichen Zahlen*;
$\ldots$.

Die Klasse Ord aller Ordinalzahlen wird durch die $\in$-Relation wohlgeordnet: in jeder nicht-leeren Teilmenge M von Ord existiert ein minimales Element $\min(M)$. Weiterhin ist Ord eine *transitive* Klasse, wobei eine Klasse X transitiv ist, falls: $z \in y$ und $y \in X$ impliziert $z \in X$.

Jede Ordinalzahl α ist eine Teilmenge von Ord, $\alpha \subseteq$ Ord, und damit wird auch α durch $\in$ wohlgeordnet und ist transitiv. Diese Eigenschaften führen nun auf die von Neumannsche Ordinalzahldefinition: Ord ist die Klasse aller Mengen, die transitiv sind und durch $\in$ wohlgeordnet werden.

Die Wohlordnungseigenschaft von Ord ist äquivalent dazu, daß sich das Prinzip der vollständigen Induktion auf den Bereich aller Ordinalzahlen ausweiten läßt. Hausdorff formuliert dieses Schlußverfahren so:

> *„Eine Aussage $f(\alpha)$ bezüglich der Ordinalzahl α ist für jedes α richtig, sobald $f(0)$ richtig ist und sobald aus der Richtigkeit aller $f(\xi)$ für $\xi < \alpha$ auf die Richtigkeit von $f(\alpha)$ geschlossen werden kann.“* [H 1914, S. 113]

Wie im Endlichen ergibt sich hieraus ein transfinites Rekursionsprinzip:

> *„$f(\alpha)$ ist für jedes α definiert, sobald $f(0)$ definiert ist und sobald vermöge der Definition aller $f(\xi)$ für $\xi < \alpha$ auch $f(\alpha)$ definiert ist.“* [H 1914, S. 113]

Dies zeigt,

> *„daß die paradox scheinende Idee, über die endliche Zahlenreihe hinaus den Zählprozeß fortzusetzen, wirklich ausführbar ist, und zwar nicht in einer nebelhaften Weise mit fragwürdigen Unendlichkeitssymbolen wie ∞, sondern nach einem präzisen Gesetz, das an jeder Stelle des Zahlensystems die nunmehr folgende Zahl als Typus der Menge aller vorangehenden Zahlen eindeutig bestimmt“* [H 1914, S. 112],

wobei nach von Neumann der „Typus“ der Menge aller vorangehenden Zahlen diese Menge selbst ist.

Der zweite von Cantor geschaffene Zahlbereich ist der der unendlichen *Kardinalzahlen.*

> *„Wir nennen zwei Mengen, zwischen denen eine* [...] *umkehrbar eindeutige Beziehung ihrer Elemente möglich ist, äquivalent.“* [H 1914, S. 33]

Die Mengen x und y sind also äquivalent oder *gleichmächtig*, $x \sim y$, falls es eine Bijektion $f : x \leftrightarrow y$ gibt. Die Kardinalzahltheorie vereinfacht sich wesentlich, wenn wir wie Hausdorff den *Wohlordnungssatz* annehmen, den Cantor als „Denkgesetz“ bezeichnet hat [Ca 1883, S. 169] und der von Zermelo aus dem Auswahlaxiom bewiesen wird [Ze 1904, Ze 1908]:

> *„Jede Menge kann wohlgeordnet werden“.* [H 1914, S. 133]

Durch transfinite Rekursion kann man dann zu jeder Menge x eine Ordinalzahl finden, die zu x äquivalent ist. Die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* von x ist definiert als

$$\overline{\overline{x}} = \min\{\alpha | \alpha \in \mathrm{Ord} \text{ und } \alpha \sim x\}.$$

Die Klasse

$$\mathrm{Kard} = \{\overline{\overline{x}} | x \text{ ist eine Menge}\}$$

aller *Kardinalzahlen* ist unbeschränkt in den Ordinalzahlen [H 1914, S. 123]. Durch Rekursion können wir eine Funktion

$$\alpha \mapsto \aleph_\alpha$$

definieren, die die unendlichen Kardinalzahlen ihrer Größe nach aufzählt [H 1914, S. 124][3]:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < \ldots .$$

$\aleph_0 = \omega$ ist die abzählbare Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen; $\aleph_1$ ist die kleinste überabzählbare Kardinalität. Während im Endlichen Ordinalzahlen und Kardinalzahlen übereinstimmen, sind nur „wenige" unendliche Ordinalzahlen auch Kardinalzahlen, denn eine unendliche Menge läßt Wohlordnungen verschiedenen Ordnungstyps zu. Zwischen je zwei unendlichen Kardinalzahlen liegen unendlich viele Ordinalzahlen, die nicht Kardinalzahlen sind. *Limeskardinalzahlen* sind Kardinalzahlen von der Form $\aleph_\alpha$, wobei α eine Limesordinalzahl ist; dann ist $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$. Die kleinste Limeskardinalzahl ist $\aleph_\omega$, der Limes von $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots$.

Die Lage der Kardinalzahlen innerhalb der Ordinalzahlen kann man durch folgendes Schema illustrieren (siehe auch die Abbildung in [H 1914, S. 125]):

$$\begin{array}{l}
0 \\
1 \\
2 \\
\vdots \\
\aleph_0 = \omega \sim \omega + 1 \sim \omega + 2 \sim \ldots \sim \omega + \omega \sim \ldots \\
\aleph_1 \sim \aleph_1 + 1 \sim \aleph_1 + 2 \sim \ldots \\
\aleph_2 \sim \aleph_2 + 1 \sim \ldots \\
\vdots \\
\aleph_\omega \sim \ldots \\
\vdots \\
\aleph_\alpha \sim \ldots \\
\aleph_{\alpha+1} \sim \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Als Grundbausteine einer Kombinatorik unendlicher Mengen führt Cantor arithmetische Operationen für Ordinalzahlen und Kardinalzahlen ein, die die Arithmetik auf $\mathcal{N}$ erweitern; wir beschränken uns hier auf die Kardinalzahlarithmetik. Seien $\kappa, \lambda \in$ Kard und A, B disjunkte Mengen mit $\kappa = \overline{\overline{A}}$, $\lambda = \overline{\overline{B}}$. Dann definiere ihre *Summe*

$$\kappa + \lambda = \overline{\overline{A \cup B}}$$

als Kardinalität der disjunkten Vereinigung von A und B. Ihr *Produkt*

[3]Die Bezeichnung der Kardinalzahlreihe durch den hebräischen Buchstaben $\aleph$ („Alef") geht auf G. Cantor zurück [Ca 1895, S. 293].

$$\kappa \cdot \lambda = \overline{\overline{A \times B}}$$

ist die Kardinalität des kartesischen Produkts von A und B, und ihre *Potenz*

$$\kappa^\lambda = \overline{\overline{\{f | f : B \to A\}}}$$

ist die Kardinalität des Raums aller Funktionen von B nach A (siehe [H 1914, S. 52 f.]).

Kardinalzahlsummen und -produkte für unendliches κ und λ ergeben sich durch Maximumsbildung (siehe [H 1914, S. 127 (7)]):

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

Für die Kardinalzahlexponentiation existiert keine ähnlich einfache Rechenregel. Durch die Identifikation reeller Zahlen mit unendlichen Dualbrüchen, die wiederum als charakteristische Funktionen auf $\mathcal{N}$ aufgefaßt werden können, ergibt sich[4]

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\{f | f : \mathcal{N} \to 2\}}} = \overline{\overline{\mathcal{R}}}.$$

Das reelle Kontinuum R besitzt die Kardinalität $2^{\aleph_0}$, für die Cantor die berühmte *Kontinuumshypothese* postuliert [C 1878, S. 132]:

$$\text{(CH)} \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Eine äquivalente Formulierung lautet:

$$\text{Für alle } X \subseteq \mathcal{R} \text{ gilt } \overline{\overline{X}} \leq \aleph_0 \text{ oder } \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\mathcal{R}}}. \tag{2.1}$$

Dieses einfachste offene Problem der Kardinalzahlarithmetik widersetzte sich allen Bemühungen Cantors – notwendigerweise, wie wir sehen werden. Cantor vermutete ferner, daß $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ [Ca 1883, S. 207]. Fragen nach der Größe des reellen Kontinuums und ihre Verallgemeinerungen bilden bis heute einen Schwerpunkt der mengentheoretischen Forschung.

Hausdorff leistete wichtige Beiträge zur Kardinalzahltheorie. In seinen *Grundzügen einer Theorie der geordneten Mengen* [H 1908, S. 494] wird erstmals die *allgemeine Kontinuumshypothese* formuliert:

$$\text{(GCH)} \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}, \text{ für alle } \alpha \in \mathrm{Ord},$$

und als *Cantorsche Alefhypothese* bezeichnet. Hausdorff benutzt die Alefhypothese zur Konstruktion gewisser geordneter Mengen, spricht aber keine Vermutungen hinsichtlich ihrer Richtigkeit aus.

In einer frühen Schrift Hausdorffs zur Mengenlehre [H 1904] finden wir die *Hausdorffsche Rekursionsformel*

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1},$$

[4] Hausdorff argumentiert unter Benutzung von Dezimalbrüchen, daß $10^{\aleph_0} = \aleph$, wobei $\aleph$ als $\overline{\overline{\mathcal{R}}}$ definiert ist, und fährt charakteristisch humorvoll fort: „Da die Tatsache, daß wir zehn Finger haben, offenbar auf die Mengenlehre ohne Einfluß ist, so können wir statt dekadischer Brüche auch dyadische, triadische usw. zur Darstellung der reellen Zahlen verwenden und erhalten also $\aleph = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots$“ [H 1914, S. 63]

eines der wenigen bekannten Gesetze über die Kardinalzahlexponentiation. Ihr Beweis beruht auf der Betrachtung der *Konfinalität* von $\aleph_{\alpha+1}$, einem von Hausdorff eingeführten grundlegenden Begriff [H 1908]. $X \subseteq \delta$ heißt *konfinal* in einer Limesordinalzahl δ, wenn es für alle $\beta \in \delta$ ein $\gamma \in X$ gibt mit $\beta < \gamma$. Die *Konfinalität* von δ ist definiert als

$$\operatorname{cof}(\delta) = \min\{\overline{\overline{X}} | X \subseteq \delta \text{ ist konfinal in } \delta\}.$$

δ heißt *regulär*, wenn $\operatorname{cof}(\delta) = \delta$, ansonsten ist δ *singulär* [H 1908, S. 442]. Singuläre Ordinalzahlen sind „in wenigen Schritten" von unten erreichbar. Hausdorff zeigt unter impliziter Benutzung des Auswahlaxioms, daß jede Nachfolgerkardinalzahl $\aleph_{\alpha+1}$ regulär ist [H 1908, S. 443].

In [H 1908, S. 443] stellt Hausdorff die weitreichende Frage nach der Existenz regulärer Limeskardinalzahlen $\aleph_\alpha$. Diese heutzutage als *schwach unerreichbar* bezeichneten Kardinalzahlen sind das erste Beispiel *großer Kardinalzahlen.* Große Kardinalzahlen sind charakterisiert durch Abschlußeigenschaften gegenüber starken mengentheoretischen Prozessen.

> κ ist *schwach unerreichbar*, wenn κ regulär und überabzählbar ist und für alle $\aleph_\alpha < \kappa$ auch $\aleph_{\alpha+1} < \kappa$ ist.
>
> κ ist *(stark) unerreichbar*, wenn κ regulär und überabzählbar ist und für alle $\aleph_\alpha < \kappa$ auch $2^{\aleph_\alpha} < \kappa$ ist.

Ähnlich wie man die Ordinalzahl ω als Limes oder „idealen Punkt" der endlichen Kombinatorik betrachten kann, so sind große Kardinalzahlen „ideale Punkte" der unendlichen Kombinatorik. Im Cantorschen Mengenuniversum, in dem alles widerspruchsfrei Denkbare allein dadurch schon ein gewisses Existenzrecht hat [Ca 1932, S. 443], erscheint der Schritt von erreichbaren zu unerreichbaren Kardinalzahlen ähnlich gerechtfertigt wie der Schritt von den endlichen Mengen zur Menge $\mathcal{N}$ der natürlichen Zahlen.

Damit ist noch nicht dem Einwand widersprochen, daß sich diese Zahlen in einem irrelevanten „Never-never-land" befänden [ML 1983, S. 54], das jenseits jeder vernünftigen mathematischen Konstruktion liegt. Wir werden aber im 5. Kapitel darstellen, daß die Existenz großer Kardinalzahlen konkrete Bezüge zur Mengenlehre reeller Zahlen hat. Umgekehrt implizieren bestimmte Annahmen über reelle Zahlen die Existenz großer Kardinalzahlen in geeigneten Modellen der Mengenlehre.

Die bisherigen Ausführungen befassen sich neben Mengen mit geordneten Paaren, Funktionen, reellen Zahlen und anderen mathematischen Grundobjekten. Ohne Einschränkung können diese Objekte selbst als Mengen aufgefaßt werden, so daß sich alle Überlegungen innerhalb des „reinen" Mengenuniversums abspielen: das geordnete Paar (a, b) sei definiert als $\{\{a\}, \{a, b\}\}$[5]; eine Funktion ist eine Menge geordneter Paare mit Eindeutigkeitseigenschaften; natürliche Zahlen seien die Elemente der von Neumannschen Menge ω. Ganze Zahlen lassen sich mit Hilfe geordneter Paare natürlicher Zahlen einführen, rationale Zahlen durch geordnete Paare

[5] Auch der von Hausdorff vorgeschlagene Term $\{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$ hat „die formalen Eigenschaften des geordneten Paares" [H 1914, S. 32].

ganzer Zahlen, und schließlich seien reelle Zahlen die linken Hälften Dedekindscher Schnitte in $\mathcal{Q}$.

3. Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome

Versteht Hausdorff unter einer Menge „eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen“, so stellt sich angesichts der mengentheoretischen Antinomien die Frage, welche Zusammenfassungen in der Hausdorffschen Mengenlehre beabsichtigt und zugelassen sind. Bereits Cantor hatte bemerkt, daß gewisse Zusammenfassungen keine Mengen sein können und hatte diese als *inkonsistente Vielheiten* bezeichnet [Briefe an Richard Dedekind in Ca 1932, S. 443 ff.]. Bekanntestes Beispiel einer inkonsistenten Vielheit ist die Russellsche Klasse $X = \{x|x \notin x\}$; wird X als Menge angenommen, so ergibt sich sofort der Widerspruch $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$ [Ru 1903].

In seinen Briefen an Dedekind beschreibt Cantor einige grundlegende Mengenbildungsprozesse, die sich in den späteren Axiomatisierungen wiederfinden. Hausdorff beruft sich auf Ernst Zermelo: „Den [...] notwendigen Versuch, den Prozeß der uferlosen Mengenbildung durch geeignete Forderungen einzuschränken, hat E. Zermelo unternommen“ [H 1914, S. 2]. Zermelos Begründung der Mengenlehre ist eine axiomatische [Ze 1908]. Nicht das „Menge-Sein“ als solches wird erklärt, sondern formale Eigenschaften der Relation $x \in y$ zwischen Mengen werden aufgelistet. Hausdorff betrachtet Zermelos „äußerst scharfsinnige Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen“ [H 1914, S. 2]. Einen bis heute gültigen Abschluß findet das Zermelosche System durch zusätzliche Axiome von Dmitry Mirimanoff [Mi 1917] und Abraham Fraenkel [Fl 1922] und seine Formulierung in einer formalen Sprache durch Thoralf Skolem [Sk 1922]. Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome einschließlich des Auswahlaxioms erlauben sämtliche Argumente aus den *Grundzügen der Mengenlehre*, so daß wir dieses als ZFC bezeichnete Axiomensystem[6] als formale Basis der Hausdorffschen Mengenlehre ansehen können.

Die mengentheoretischen Axiome werden in der Sprache der *Prädikatenlogik erster Stufe* formuliert. Ausdrücke dieser Sprache sind Wörter über einem Alphabet mit den Symbolen $\doteq$ für die *Identität*, $\dot{\in}$ für die *Elementbeziehung*, sowie *Variablen* $v_0, v_1, v_2, \ldots$. Die *atomaren Formeln* der Sprache sind von der Form

$v_i \doteq v_j$ („v_i ist identisch mit v_j“)

und

$v_i \dot{\in} v_j$ („v_i ist ein Element von v_j“).

Die *Formeln der Mengenlehre* werden aus den atomaren Formeln nach folgenden Regeln aufgebaut: wenn ϕ, ψ Formeln der Mengenlehre sind, so auch

$\neg\phi$ („nicht ϕ“),

[6] Der Buchstabe „C“ steht für das Auswahlaxiom („axiom of choice“).

$$\begin{array}{rl} (\phi \wedge \psi) & (\text{„}\phi \text{ und } \psi\text{“}), \\ (\phi \vee \psi) & (\text{„}\phi \text{ oder } \psi\text{“}), \\ (\phi \rightarrow \psi) & (\text{„}\phi \text{ impliziert } \psi\text{“}), \\ (\phi \leftrightarrow \psi) & (\text{„}\phi \text{ ist äquivalent zu } \psi\text{“}), \\ \forall v_i \phi & (\text{„für alle } v_i \text{ gilt } \phi\text{“}), \\ \exists v_i \phi & (\text{„es gibt ein } v_i, \text{ so daß } \phi\text{“}). \end{array}$$

Wenn ein Bereich B mit einer zweistelligen Relation E für die Elementbeziehung gegeben ist und eine Zuordnung von Werten b_n aus B für die Variablen v_n, so ist rekursiv für jede Formel ϕ durch die in Klammern angegebenen Erklärungen festgelegt, ob ϕ in B gilt; in diesem Fall nennt man B ein *Modell* von ϕ und schreibt $(B, E) \models \phi$.

Zur Bezeichnung von Formeln benutzt man naheliegende Abkürzungen und Konventionen: redundante Klammern fallen weg, Variablen werden mit $x, y, z, \ldots$ bezeichnet, statt $\doteq$ und $\dot{\in}$ schreiben wir oft nur $=$ und $\in$. Die Schreibweise $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ beinhaltet, daß alle Variablen der Formel ϕ unter den $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen.

Für den Umgang mit „Zusammenfassungen“ sind *Klassenterme* der Gestalt

$$\{x|\phi\}$$

hilfreich, in denen x eine Variable und ϕ eine Formel ist. $\{x|\phi\}$ steht für die *Klasse* aller Mengen x mit der Eigenschaft ϕ. Das Einsetzen von Klassentermen in Formeln erlaubt suggestive, abkürzende Schreibweisen für komplexe Zusammenhänge, wobei die Reduktion auf die formale Sprache der Mengenlehre nach folgender Vereinbarung erfolgt:

$$\begin{array}{l} \{x|\phi(x, x_1, \ldots, x_m)\} \doteq \{y|\psi(y, y_1, \ldots, y_n)\} \text{ steht für:} \\ \qquad \forall z(\phi(z, x_1, \ldots, x_m) \leftrightarrow \psi(z, y_1, \ldots, y_n)), \\ \{x|\phi(x, x_1, \ldots, x_m)\} \dot{\in} \{y|\psi(y, y_1, \ldots, y_n)\} \text{ steht für:} \\ \qquad \exists y(\psi(y, y_1, \ldots, y_n) \wedge y \doteq \{x|\phi(x, x_1, \ldots, x_m)\}). \end{array}$$

Hierbei sind die neuen Variablen sinnvoll zu wählen. Ist in der zu reduzierenden Formel bereits auf einer Seite eine Variable w vorhanden, so ersetzt man zunächst w durch den Klassenterm $\{x|x \in w\}$ und benutzt dann die Vereinbarungen.

Mathematische Begriffsdefinitionen sind nun formal nichts anderes als die Festlegung von – suggestiven und handlichen – *Namen* für bestimmte Formeln und Klassenterme. Wir wollen einige zur Formulierung der Zermelo-Fraenkelschen Axiome nützliche Begriffe definieren; wir geben jeweils den eingeführten Namen, die bezeichnete Formel oder den bezeichneten Klassenterm und die intendierte Bedeutung an:

$0 := \{x|\neg x = x\}$, „Null“ oder „die leere Menge“;

$x \subseteq y := \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$, „$x$ ist Teilmenge von y“;

$\{x\} := \{z|z = x\}$, „die Einermenge von x“;

$\{x, y\} := \{z|z = x \vee z = y\}$, „das ungeordnete Paar von x und y“;

$x \cup y := \{z|z \in x \vee z \in y\}$, „die Vereinigung von x und y“;

$x \cap y := \{z|z \in x \wedge z \in y\}$, „der Schnitt von x und y“;

$\bigcup x := \{y|\exists z(y \in z \wedge z \in x)\}$, „die Vereinigung (der Elemente) von x“;

$\mathcal{P}(x) := \{y|y \subseteq x\}$, „die Potenzmenge von x“;

$x + 1 := x \cup \{x\}$, „der Nachfolger von x“;

$\mathrm{Nach}(x) := \exists y(x = y + 1)$, „$x$ ist Nachfolger“;

$\mathrm{Nat}(x) := (x = 0 \vee \mathrm{Nach}(x)) \wedge \forall y(y \in x \to (y = 0 \vee \mathrm{Nach}(y)))$,
„x ist eine natürliche Zahl“;

$\omega := \{x|\mathrm{Nat}(x)\}$, „die Menge der natürlichen Zahlen“;

$\mathrm{V} := \{x|x = x\}$, „die Allklasse“ oder „das Universum“.

Diese Definitionen haben zunächst einen rein formalen Charakter; die Identifikation von ω etwa mit der üblichen Vorstellung der Menge der natürlichen Zahlen läßt sich erst rechtfertigen, wenn in den Axiomen genügend viele Struktureigenschaften der $\in$-Relation zur Verfügung stehen.

Wir zählen nun die Axiome des Systems ZFC auf, wobei wir uns an der Zermeloschen Reihenfolge [Ze 1908] orientieren.

(3.1) *Extensionalitätsaxiom* oder *Axiom der Bestimmtheit:*

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

In Hausdorffs Worten besagt dies: „Zwei Mengen [...] werden dann und nur dann als gleich betrachtet [...], wenn sie genau dieselben Elemente enthalten“ [H 1914, S. 2].

(3.2) *Nullmengenaxiom:*

$$\exists x\ x = 0.$$

Zur Zeit Hausdorffs ist der Begriff der leeren Menge keine Selbstverständlichkeit:

> *„Außer den Mengen, die Elemente haben, lassen wir auch eine Menge* 0*, die Nullmenge, zu, die kein Element hat; die Gleichung $A = 0$ bedeutet also, daß auch die Menge A kein Element hat, verschwindet, leer ist.“* Und: *„Die Ausdrucksweise: „die Menge A existiert nicht“, können wir nicht akzeptieren. Sie existiert, aber es existieren keine Elemente von ihr.“* [H 1914, S. 3]

(3.3) *Paarmengenaxiom:*

$$\forall x \forall y \exists z\ z = \{x, y\}.$$

(3.4) *Aussonderungsaxiom:* für alle Formeln $\phi(v, y_1, \ldots, y_n)$ der Mengenlehre postuliere:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \forall a \exists z\ z = \{v | v \in a \wedge \phi(v, y_1, \ldots, y_n)\}.$$

Das Aussonderungsaxiom ist der zentrale Beitrag Zermelos, um das widersprüchliche *Grundgesetz der Wertverläufe* von Frege [Fr 1893], das zur Russellschen Antinomie führt, soweit einzuschränken, „daß die bisher bekannten „Antinomien" sämtlich verschwinden" [Ze 1908]. Man beachte, daß es sich bei dem Aussonderungsaxiom um ein unendliches *Schema* von Axiomen handelt.

(3.5) *Potenzmengenaxiom:*

$$\forall x \exists z\ z = \mathcal{P}(x).$$

(3.6) *Vereinigungsmengenaxiom:*

$$\forall x \exists z\ z = \bigcup x.$$

(3.7) *Auswahlaxiom:*

$$\forall x[(\neg 0 \in x \wedge \forall u \forall v((u \in x \wedge v \in x \wedge \neg u = v) \rightarrow u \cap v = 0)) \rightarrow \\ \exists y \forall u \exists v(u \in x \rightarrow y \cap u = \{v\})].$$

Die Menge y „wählt" zu jedem $u \in x$ ein eindeutig bestimmtes $v \in u$ vermittels der Eigenschaft $y \cap u = \{v\}$ aus; oder, wie Zermelo [Ze 1908] schreibt: „man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente M, N, R, ... von T ein einzelnes Element m, n, r, ... *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen." Hierbei wird x bzw. T als Menge paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen vorausgesetzt.

(3.8) *Unendlichkeitsaxiom:*

$$\exists x\ x = \omega.$$

Damit wird die Klasse der natürlichen Zahlen zur Menge erklärt.

Fraenkel [Fl 1922] und Skolem [Sk 1922] bemerkten, daß man im Zermeloschen Axiomensystem (3.1) – (3.8) die Existenz der Kardinalzahl $\aleph_\omega$ nicht zeigen kann. Zur Abhilfe schlägt Fraenkel ein weiteres unendliches Schema von Axiomen vor, das auch von Skolem erwogen wird:

(3.9) *Ersetzungsaxiom:* für alle Formeln $\phi(u, v, z_1, \ldots, z_n)$ der Mengenlehre postuliere:

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n (\forall u \forall v \forall v'((\phi(u, v, z_1, \ldots, z_n) \wedge \phi(u, v', z_1, \ldots, z_n)) \rightarrow v = v') \\ \rightarrow \forall x \exists y\ y = \{v | \exists u(u \in x \wedge \phi(u, v, z_1, \ldots, z_n))\}).$$

Fraenkel drückt die Mengenbildung mittels Ersetzung so aus: „Ist M eine Menge und wird jedes Element von M durch ein „Ding des Bereiches $\mathcal{B}$" [$\mathcal{B}$ ist bei Zermelo der Bereich aller Objekte, d. Verf.] [...] ersetzt, so geht M wiederum in eine

Menge über“ [Fl 1922]; die Ersetzung $u \mapsto v$ wird durch die funktionale Formel $\phi(u, v, z_1, \ldots, z_n)$ definiert.

Schließlich nimmt man nach Mirimanoff [Mi 1917] ein Axiom auf, das der Vorstellung entspricht, nach der komplizierte Mengen iterativ aus einfacheren Mengen aufgebaut werden:

(3.10) *Fundierungsaxiom:*

$$\forall x(\neg x = 0 \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x))).$$

Hiernach besitzt jede nicht-leere Menge x ein „$\in$-minimales“ Element y, und es ergibt sich die Möglichkeit von Induktionen und Rekursionen entlang der $\in$-Relation.

Das System ZFC der Axiome (3.1) – (3.10) ist die derzeit allgemein akzeptierte formale Grundlage der Mengenlehre. Die Axiome sind vom naiven Mengenverständnis her gut motivierbar und genügen zur Begründung der üblichen mathematischen Begriffsbildungen. Mathematische Einsichten oder Erfordernisse, die zwingend zu einer eindeutig bestimmten Erweiterung des Systems führen müßten, liegen nicht vor.

Die axiomatische Mengenlehre untersucht die logischen Beziehungen zwischen dem Axiomensystem ZFC und weiteren mengentheoretischen Aussagen ϕ; unter ZFC+ϕ wollen wir die Erweiterung des Systems ZFC um die Aussage ϕ verstehen. Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome werden nicht nur vom naiven Mengenbegriff erfüllt, der gewissermaßen das „Standardmodell“ der Theorie darstellt, sondern möglicherweise auch in Modellen der Form (W, E), in denen die zweistellige Relation E auf dem Bereich W das Symbol $\dot{\in}$ der formalen Sprache interpretiert.

Die Logik der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre, d.h. ihre Sprache und ihr Modellbegriff, ist die *Prädikatenlogik erster Stufe*. Fundamental für diese Logik sind die *Gödelschen Sätze*, die für die Mengenlehre wichtige Konsequenzen haben. Kurt Gödel reduziert im *Vollständigkeitssatz* [Gö 1930] den Begriff des Beweises für Ausdrücke erster Stufe auf Ableitungen in einem Hilbertschen Formelkalkül, d.h. auf endliche Folgen von Formeln, die aus den Voraussetzungen sukzessiv nach rein formalen Regeln gebildet werden (siehe [HiAc 1928]):

> Die Formel ϕ gilt in jedem Modell von Φ (man sagt dann, Φ *impliziert* ϕ, $\Phi \models \phi$), wenn es eine formale Ableitung von ϕ aus Φ im Kalkül gibt.

Die formale Ableitbarkeit wird durch $\Phi \vdash \phi$ bezeichnet. Ein Axiomensystem Φ ist *konsistent* oder *widerspruchsfrei*, wenn es nicht möglich ist, aus Φ die widerspruchsvolle Formel $\neg x = x$ abzuleiten; wir schreiben dann Kons(Φ). Aus dem *ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz* [Gö 1931] folgt, daß es Aussagen ϕ in der Sprache der Mengenlehre gibt, die vom System ZFC *unabhängig* sind, d.h. Kons(ZFC + ϕ) $\leftrightarrow$ Kons(ZFC + $\neg\phi$). Eine unabhängige Aussage läßt sich nicht in ZFC entscheiden. Die Unvollständigkeit der axiomatisierten Mengenlehre betrifft aber nicht nur gewisse selbstbezügliche Aussagen vom Typ „diese Aussage ist nicht beweisbar“, sondern auch konkrete Fragen wie z. B. die Cantorsche Kontinuumshypothese.

Der *zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz* [Gö 1931] zielt direkt auf die Frage der Widerspruchsfreiheit. Da man innerhalb des Systems ZFC die natürlichen Zahlen, endliche Wörter über einem Alphabet, die Aufzählung der Zermelo-Fraenkelschen Axiome selbst und schließlich den Hilbertschen Kalkül formalisieren kann, gibt es eine mengentheoretische Aussage mit der Bedeutung „Kons(ZFC)“, die wir auch so bezeichnen wollen. Der Gödelsche Satz sagt nun:

> Wenn die Theorie ZFC widerspruchsfrei ist, so ist die Aussage „Kons(ZFC)“ nicht in ZFC beweisbar.

Dieser Satz stellt eine unüberwindbare Grenze für Konsistenzuntersuchungen dar. Eine Formalisierung der Grundlagen der Mathematik kann ohne weitere Annahmen nicht als konsistent bewiesen werden. Die axiomatische Mengenlehre kann allenfalls *relative* Konsistenzbeweise durchführen, in denen aus der angenommenen Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems auf die Widerspruchsfreiheit eines zweiten Systems geschlossen wird.

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz läßt sich in der Theorie der großen Kardinalzahlen anwenden. Für eine stark unerreichbare Kardinalzahl κ sei V_κ die kleinste transitive Menge, die gegenüber der Potenzmengenbildung abgeschlossen ist und für die mit $\{x_i | i < \gamma\} \subseteq V_\kappa, \gamma < \kappa$, auch $\bigcup_{i<\gamma} x_i \in V_\kappa$ ist. $(V_\kappa, \in)$ ist ein Modell von ZFC. Da man wegen des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes innerhalb des Systems ZFC kein Modell von ZFC konstruieren kann, ist die Existenz einer unerreichbaren Zahl nicht beweisbar, und wir erhalten ein relatives Konsistenzresultat:

> Kons(ZFC) $\Longleftrightarrow$ Kons(ZFC + „es gibt *keine* stark unerreichbare Kardinalzahl“),

das die in der Einleitung zitierten Vermutungen Hausdorffs über „exorbitante“ Kardinalzahlen unterstützt.

4. Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

David Hilbert nahm „Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums“ als erstes in seine Auswahl *Mathematischer Probleme* [Hi 1900] auf. Er schreibt:

> *„Die Untersuchungen von Cantor* [...] *machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch niemandem gelungen ist; dieser Satz lautet:*
>
> *Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen, d.h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt-)menge, ist entweder der Menge der ganzen*

> *natürlichen Zahlen 1,2,3,... oder der Menge sämtlicher reellen Zahlen und mithin dem Kontinuum, d.h. etwa den Punkten einer Strecke, äquivalent; im Sinne der Äquivalenz gibt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Kontinuum."*

Für die Kontinuumshypothese spricht, daß man keine Definition einer Zahlenmenge kennt, deren Mächtigkeit beweisbar zwischen der Mächtigkeit von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ liegt. Andererseits folgt aus der Kontinuumshypothese die Existenz einer Wohlordnung von $\mathcal{R}$ im Ordnungstyp $\aleph_1$, die man ebenfalls nicht explizit angeben kann. Die Annahme einer solchen Wohlordnung hätte eine Reihe unanschaulicher Konsequenzen (siehe [Gö 1947]).

Cantor hat immer wieder vergeblich, teilweise bis zum psychischen Zusammenbruch, um einen Beweis seiner Hypothese gerungen [Sch 1927]. Auch Hausdorff wird die Kontinuumshypothese vor Augen gehabt haben, wenn er in den *Grundzügen einer Theorie der geordneten Mengen* [H 1908] an einer Klassifikation der Ordnungstypen abzählbarer linearer Ordnungen arbeitet. Es gibt ebensoviele Typen wie reelle Zahlen, und wenn es möglich wäre, die Typen durch ein endliches System von Ordinalzahlinvarianten $< \aleph_1$ zu indizieren, so ergäbe dies einen Beweis der Kontinuumshypothese. Hausdorff äußert sich allerdings vorsichtig über die Möglichkeit einer derartigen Klassifikation: „ob hiermit die Analyse jedes beliebigen Typus bis zu den genannten Urtypen hinunter gelingen wird, soll noch dahingestellt bleiben" [H 1908, S. 436]. Hausdorffs Beiträge zur deskriptiven Mengenlehre haben ebenfalls direkte Bezüge zum Kontinuumsproblem (siehe Kap. 5).

Aus heutiger Sicht erklären sich die Fehlschläge zur Entscheidung der Kontinuumshypothese aus ihrer *Unabhängigkeit* von der Zermelo-Fraenkelschen Axiomatisierung der Mengenlehre. Kurt Gödel [Gö 1938] und Paul J. Cohen [Co 1963] haben bewiesen:

> das System ZFC+CH ist widerspruchsfrei, gdw. ZFC + $\neg$CH widerspruchsfrei ist.

Die folgenden Ausführungen sollen eine Vorstellung vermitteln, wie die Unabhängigkeitsbeweise geführt werden können, die das Hilbertsche Problem auf unerwartete Weise geklärt haben.

Die Unabhängigkeit des Parallelenpostulats in der Geometrie liefert ein Vorbild für das Vorgehen in der Mengenlehre. Die Konsistenz eines Axiomensystems wird in der Regel durch die Konstruktion eines Modells nachgewiesen. Wenn aus dem Axiomensystem die widersprüchliche Aussage $\neg x = x$ folgte, so müßte diese auch in dem Modell gelten, was unmöglich ist. Ein bekanntes Modell einer (zweidimensionalen) nicht-euklidischen Geometrie ist das Poincarésche *Kreisscheibenmodell* für die hyperbolische Geometrie [Po 1882], in dem die „Punkte" der Axiome als Punkte x im Innern der Kreisscheibe und „Geraden" als auf dem Kreis senkrecht stehende Kreissegmente oder Durchmesser interpretiert werden. „Längen" und „Winkel" lassen sich ebenfalls in dem Modell erklären. In der euklidischen Geometrie kann man die Bestandteile des Kreisscheibenmodells definieren und ihre Eigenschaften nachweisen. Damit wird die nicht-euklidische Geometrie innerhalb der euklidischen *interpretiert* und wir erhalten als geometrisches relatives Konsistenzresultat:

> Kons(Axiome der euklidischen Geometrie) $\Rightarrow$ Kons(Axiome der hyperbolischen Geometrie).

Leitgedanke der relativen Konsistenzbeweise in der Mengenlehre ist ebenfalls die Definition von Modellen, mit denen sich ein Axiomensystem innerhalb eines anderen interpretieren läßt. Eine *Interpretation* von ZFC $+ \phi$ in ZFC wird durch eine syntaktische Transformation

$$\psi \mapsto \psi^*$$

von Formeln der Mengenlehre gegeben, so daß:

(4.1) ZFC $\vdash \psi^*$ für alle Axiome ψ aus ZFC $+ \phi$;

(4.2) Wenn $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \psi$, dann ZFC $\vdash (\psi_1^* \wedge \ldots \wedge \psi_n^*) \longrightarrow \psi^*$;

(4.3) ZFC $\vdash \neg(\neg x = x)^*$.

Wenn ZFC $+ \phi$ in ZFC interpretierbar ist, so gilt:

$$\text{Kons(ZFC) impliziert Kons(ZFC } + \phi).$$

Beweis: Angenommen ZFC $+ \phi$ wäre inkonsistent. Der Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes zeigt, daß es dann endlich viele Axiome $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus ZFC $+ \phi$ gibt mit

$$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \neg x = x.$$

Da ZFC $+ \phi$ in ZFC durch $\psi \mapsto \psi^*$ interpretiert wird, gilt dann:

$$\text{ZFC} \vdash \psi_1^* \wedge \ldots \wedge \psi_n^*,$$

$$\text{ZFC} \vdash (\psi_1^* \wedge \ldots \wedge \psi_n^*) \rightarrow (\neg x = x)^*.$$

Also, nach der Schlußregel *modus ponens* des Ableitungskalküls:

$$\text{ZFC} \vdash (\neg x = x)^*,$$

während andererseits

$$\text{ZFC} \vdash \neg(\neg x = x)^*.$$

Also wäre ZFC inkonsistent.

Die ersten relativen Konsistenzresultate im Rahmen der Mengenlehre finden sich bei Fraenkel [Fl 1922] und Skolem [Sk 1922]. Die Methode der Interpretation ist der mengentheoretischen Situation besonders angemessen, da sie *relative* Konsistenzen liefert; *absolute* Konsistenzresultate von der Gestalt: ZFC $\vdash$ Kons(ZFC + ...) sind nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz (hoffentlich) ausgeschlossen.

Das Gödelsche Modell der konstruktiblen Mengen

Kurt Gödel zeigte 1938 die relative Konsistenz der Kontinuumshypothese mit Hilfe des Modells L der *konstruktiblen Mengen* [Gö 1938]: Das Modell L entsteht durch eine transfinit iterierte Bildung definierbarer Teilmengen. Eine Teilmenge $y \subseteq x$ ist *definierbar* über $(x, \in)$, wenn es eine Formel $\phi(v, v_1, \ldots, v_n)$ der Mengenlehre und Parameter $z_1, \ldots, z_n \in x$ gibt mit $y = \{v \in x | (x, \in) \models \phi(v, z_1, \ldots, z_n)\}$. Dann ist

$$\mathrm{Def}(x) = \{y \subseteq x | y \text{ ist definierbar über } (x, \in)\}$$

die Menge der über der Struktur $(x, \in)$ definierbaren Teilmengen von x. Die Hierarchie der konstruktiblen Mengen wird rekursiv definiert:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_0 := 0;\\
&\mathrm{L}_{\alpha+1} := \mathrm{Def}(\mathrm{L}_\alpha);\\
&\mathrm{L}_\lambda := \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{L}_\alpha, \text{ für Limesordinalzahlen } \lambda;\\
&\mathrm{L} := \textstyle\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathrm{L}_\alpha.
\end{aligned}$$

Das Gödelsche Modell ist das Submodell des Universums V mit der Trägerklasse L. Die *Gödelsche Interpretation*

$$\psi \mapsto \psi^{\mathrm{L}}$$

besteht dementsprechend in der *Beschränkung* der Laufbereiche aller Quantoren auf die Klasse L. Man definiert rekursiv über den Formelaufbau:

$$\begin{aligned}
&(x = y)^{\mathrm{L}} := x = y;\\
&(x \in y)^{\mathrm{L}} := x \in y;\\
&(\neg\phi)^{\mathrm{L}} := \neg\phi^{\mathrm{L}};\\
&(\phi \wedge \psi)^{\mathrm{L}} := \phi^{\mathrm{L}} \wedge \psi^{\mathrm{L}};\\
&(\phi \vee \psi)^{\mathrm{L}} := \phi^{\mathrm{L}} \vee \psi^{\mathrm{L}};\\
&(\phi \to \psi)^{\mathrm{L}} := \phi^{\mathrm{L}} \to \psi^{\mathrm{L}};\\
&(\phi \leftrightarrow \psi)^{\mathrm{L}} := \phi^{\mathrm{L}} \leftrightarrow \psi^{\mathrm{L}};\\
&(\forall x\psi)^{\mathrm{L}} := \forall x(x \in \mathrm{L} \to \psi^{\mathrm{L}});\\
&(\exists x\psi)^{\mathrm{L}} := \exists x(x \in \mathrm{L} \wedge \psi^{\mathrm{L}}).
\end{aligned}$$

Der umfangreiche Beweis, daß dies eine Interpretation von ZFC+CH in ZFC ist, beruht darauf, daß durch die iterierte Anwendung des Def-Operators genügend viele Aussonderungsmengen in L existieren, um die Mengenexistenzaxiome bereits im Untermodell L zu erfüllen. Wir betrachten zwei einfache Fälle.

Für das *Extensionalitätsaxiom* benötigen wir die leicht nachzuweisende Transitivität der Klasse L. Aus dem Extensionalitätsaxiom $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$ folgt:

$$\forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L}(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y),$$

da eine Allaussage bei Einschränkung des Quantors richtig bleibt, wobei wir $\forall x \in \mathrm{L} \ldots$ für den auf L eingeschränkten Allquantor $\forall x(x \in \mathrm{L} \rightarrow \ldots)$ schreiben. Weiter ist

$$\forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L}(\forall z \in \mathrm{L}(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y);$$

denn für $x, y \in \mathrm{L}$ sind alle z, die Elemente von x oder y sind, wegen der Transitivität von L ihrerseits Elemente von L; letzteres ist das

$$(\text{Extensionalitätsaxiom})^{\mathrm{L}}.$$

Paarmengenaxiom: Unter Benutzung der Def-Operation sieht man:

$$\forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L} \exists z \in \mathrm{L}\ z = \{x, y\}.$$

Dies ist aber noch nicht ausreichend, denn wir müssen zeigen, daß z auch *innerhalb des Modells* L das ungeordnete Paar von x und y darstellt. Unter Benutzung unserer Vereinbarungen für die Elimination von Klassentermen schließen wir weiter:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L} \exists z \in \mathrm{L}\ z = \{v | v = x \vee v = y\} \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L} \exists z \in \mathrm{L} \forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y) \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathrm{L} \forall y \in \mathrm{L} \exists z \in \mathrm{L} \forall w \in \mathrm{L}(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y),
\end{aligned}$$

da die Einschränkung des Quantors $\forall w$ wiederum zu einer schwächeren Aussage führt;

$$\Rightarrow (\text{Paarmengenaxiom})^{\mathrm{L}}.$$

Der Nachweis der Kontinuumshypothese in L beruht auf einem genauen Studium der Mengenbildung in den Nachfolgerschritten der konstruktiblen Hierarchie. Es gilt:

$$x \subseteq \omega \wedge x \in \mathrm{L}_{\alpha+1} \setminus \mathrm{L}_\alpha \wedge \alpha \geq \omega \longrightarrow \exists f \in \mathrm{L}\ \ f : \omega \rightarrow \alpha \text{ surjektiv}.$$

Jede konstruktible Teilmenge von ω erscheint auf einer Stufe der Hierarchie, die aus der Sicht von L abzählbar ist. $\mathcal{P}(\omega) \cap \mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}_\delta$, wobei δ die kleinste überabzählbare Kardinalzahl in L ist. L_δ besitzt innerhalb von L die Kardinalität $\aleph_1$, und damit ergibt sich $(\mathrm{CH})^{\mathrm{L}}$.

Die Interpretationseigenschaft impliziert das relative Konsistenzresultat von Gödel [Gö 1938]:

$$\text{Kons(ZFC)} \Rightarrow \text{Kons(ZFC+CH)}.$$

Das Modell L ist ein ausgezeichnetes Modell der Mengenlehre. Es ist eine transitive echte Klasse, und unter der Interpretation, die durch Einschränkung aller Quantoren auf die Klasse gegeben ist, ergibt sich ein Modell der ZFC-Axiome. Strukturen dieser Art heißen *innere Modelle* der Mengenlehre. Die rekursive Definition der L_α-Hierarchie ist in jedem inneren Modell gleichermaßen durchführbar, und daher ist L das *kleinste* innere Modell bezüglich der Inklusion.

Im Modell L lassen sich neben der Kontinuumshypothese viele weitere kombinatorische Eigenschaften nachweisen. Hausdorffs verallgemeinerte Kontinuumshypothese gilt in L [Gö 1938] und damit ist sie relativ konsistent bezüglich ZFC:

Kons(ZFC) $\Rightarrow$ Kons(ZFC+GCH).

Das detaillierte Studium der Mengenbildung in der L_α-Hierarchie ist besonders von Ronald B. Jensen in der *Feinstrukturtheorie* [Je 1972] weiterentwickelt worden. Jensen hat kombinatorische Eigenschaften in L entdeckt, die die Konstruktion ungewöhnlicher Strukturen in der unendlichen Mathematik erlauben, etwa in der mengentheoretischen Topologie (siehe [KuVa 1984]), in der Theorie unendlicher abelscher Gruppen (siehe [EkMe 1990]) oder im Bereich der Booleschen Algebren (siehe [Mk 1989]).

Die Cohensche Erzwingungsmethode (Forcing)

Paul J. Cohen bewies im Jahr 1963 den zum Gödelschen Resultat komplementären Satz [Co 1963]:

Kons(ZFC) $\Rightarrow$ Kons(ZFC + $\neg$CH).

Damit ist die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese und die prinzipielle Unlösbarkeit des ersten Hilbertschen Problems gezeigt. Cohen entwickelte für sein Ergebnis die *Erzwingungsmethode* („Forcing"), die innerhalb kurzer Zeit eine der wichtigsten Techniken der axiomatischen Mengenlehre wurde. Die Forcingmethode läßt sich gut mit dem von Dana Scott und Robert Solovay entwickelten Zugang über *Boolesche Modelle* der Mengenlehre motivieren (siehe [Be 1977]).

Die gewöhnliche Prädikatenlogik ist zweiwertig: in einem gegebenen Modell ist eine Aussage wahr (1) oder falsch (0), und die Wahrheitswerte bilden die zweielementige Boolesche Algebra $2 = \{0, 1\}$. Mengen lassen sich als 2-wertige charakteristische Funktionen beschreiben; für charakteristische Funktionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, die die Mengen x und y repräsentieren, ist zu fordern:

$$x \in y \Longleftrightarrow \dot{y}(\dot{x}) = 1. \tag{4.4}$$

Die Cohensche Interpretation von ZFC + $\neg$CH in ZFC beruht auf der Konstruktion eines Boolesch-wertigen Modells V^B der Mengenlehre über einer geeigneten vollständigen Booleschen Algebra $B = (B, 0, 1, \leq)$. Die Algebra B ist *vollständig*, wenn für beliebige Teilmengen $X \subseteq B$ das Supremum $\Sigma_{b \in X} b$ und das Infimum $\Pi_{b \in X} b$ bezüglich der partiellen Ordnung $\leq$ existieren. Die Trägerklasse V^B des Booleschen Modells ist die $\subseteq$-kleinste Klasse X, die gegenüber der Bildung B-wertiger Funktionen abgeschlossen ist, d. h.

$$\forall x \forall a (x : a \to B \wedge a \subseteq X \to x \in X).$$

Formeln $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ der Mengenlehre, deren Variablen mit Funktionen $x_1, \ldots, x_n \in V^B$ belegt sind, ordnet man einen „Wahrheitswert"

$$\| \phi(x_1, \ldots, x_n) \|^B \in B$$

zu. Die Zuordnung ist ein Homomorphismus der logischen Operationen in die Booleschen Operationen auf B:

$\| \phi \wedge \psi \|^B := \| \phi \|^B \cdot \| \psi \|^B;$
$\| \phi \vee \psi \|^B := \| \phi \|^B + \| \psi \|^B;$
$\| \neg\phi \|^B := - \| \phi \|^B;$
$\| \exists v \phi(v) \|^B := \Sigma_{x \in V^B} \| \phi(x) \|^B;$
$\| \forall v \phi(v) \|^B := \Pi_{x \in V^B} \| \phi(x) \|^B$.

Die Definition der Wahrheitswerte für atomare Aussagen $x \in y$ und $x = y$ orientiert sich an 4.4 und an dem Ziel, dem Extensionalitätsaxiom den Booleschen Wert 1 zu geben. Für $x, y \in V^B,\ x : a \to B,\ y : b \to B$ definiere durch simultane transfinite Rekursion:

$$\| x \in y \|^B := \Sigma_{z \in b}(y(z) \cdot \| x = z \|^B)\ ;$$

$$\| x = y \|^B := \Pi_{z \in a}(-x(z) + \| z \in y \|^B)\ \cdot\ \Pi_{z \in b}(-y(z) + \| z \in x \|^B)\ .$$

Durch aufwendige Rechnungen zeigt man, daß alle Axiome des Systems ZFC den Booleschen Wert 1 besitzen und daß die Abbildung

$$\phi\ \longmapsto \| \phi \|^B = 1$$

eine Interpretation von ZFC in ZFC ist.

Wir wollen hier nur den Beweis für das Aussonderungsaxiom andeuten. Sei $\varphi(v, y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel der Mengenlehre mit $y_1, \ldots, y_n \in V^B$. Sei $x \in V^B,\ x : a \to B$. Das Boolesche Äquivalent der Aussonderungsmenge $\{v | v \in x \wedge \varphi(v, y_1, \ldots, y_n)\}$ ist die Funktion

$$z : a \to B;\ z(s) = x(s) \cdot \| \varphi(s, y_1, \ldots, y_n) \|^B;$$

für z gilt die Aussonderungseigenschaft:

$$\| \forall v (v \in z \longleftrightarrow (v \in x \wedge \varphi(v, y_1, \ldots, y_n))) \|^B = 1\ .$$

Das „Boolesche Modell“ wird im Ausgangsuniversum V definiert, aber es kann auch als Erweiterung von V angesehen werden, denn jede Menge $x \in V$ ist in der Booleschen Welt durch eine kanonisch definierte, 0-1-wertige charakteristische Funktion $\check{x}$ vertreten. Falls die Algebra B atomlos ist, existieren im Booleschen Modell noch weitere B-wertige charakteristische Funktionen, die gewissermaßen zum Ausgangsmodell hinzugefügt werden.

Wir wollen nun eine Boolesche Algebra B betrachten, für die es in der Booleschen Erweiterung mindestens $\aleph_2$ Teilmenge von ω gibt; dann ist

$$\| \neg\mathrm{CH} \|^B = 1,$$

und das Cohensche Ergebnis ist gezeigt.

Die Boolesche Algebra wird aus dem folgenden topologischen Raum ausgesondert. Es sei

$$\mathcal{C} = \{f | f : \omega \times \aleph_2 \to 2\} = \prod_{\nu \in \omega \times \aleph_2} \{0, 1\}$$

das $\omega \times \aleph_2$-fache kartesische Produkt des 2-elementigen diskreten topologischen Raums, versehen mit der Produkttopologie. Eine Subbasis der Topologie wird durch die Teilmengen

$$b_{n,\alpha,i} = \{f | f : \omega \times \aleph_2 \to 2 \wedge f(n,\alpha) = i\},$$

für $n < \omega$, $\alpha < \aleph_2$, $i \in \{0,1\}$ bestimmt.

Eine Menge $X \subseteq \mathcal{C}$ heißt *regulär offen*, wenn sie das Innere ihres Abschlusses ist: $X = \overline{X}^{\circ}$. Ein Standardtheorem aus der Theorie der Booleschen Algebren (siehe [Ko 1989, S. 25]) besagt, daß

$$B = \{X \subseteq \mathcal{C} | X \text{ regulär offen}\}$$

eine vollständige Boolesche Algebra ist mit $0 = \emptyset$, $1 = \mathcal{C}$ und der Relation $X \leq Y$ gdw. $X \subseteq Y$.

Wir definieren nun $\aleph_2$ verschiedene „Booleschen Teilmengen“ von ω. Es seien $\check{0}, \check{1}, \ldots, \check{\omega}$ die erwähnten Vertreter von $0, 1, \ldots, \omega$ im Booleschen Universum. Für $\alpha < \aleph_2$ definiere die Funktion x_α durch

$$\check{n} \mapsto b_{\alpha,n,1} \quad , \text{ für } n < \omega.$$

Für $\alpha < \aleph_2$, $n < \omega$ gilt:

$$\| \check{n} \in x_\alpha \|^B = b_{\alpha,n,1}$$

und

$$\| x_\alpha \subseteq \check{\omega} \|^B = 1.$$

Der Wert $\| x_\alpha = x_\beta \|^B$ für $\alpha < \beta < \aleph_2$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\| x_\alpha = x_\beta \|^B \\
&= \| \forall n < \omega (n \in x_\alpha \leftrightarrow n \in x_\beta) \|^B \\
&= \textstyle\prod_{n<\omega} \| \check{n} \in x_\alpha \leftrightarrow \check{n} \in x_\beta \|^B \\
&= \textstyle\prod_{n<\omega} \| (\check{n} \in x_\alpha \wedge \check{n} \in x_\beta) \ \vee \ (\check{n} \notin x_\alpha \wedge \check{n} \notin x_\beta) \|^B \\
&= \textstyle\prod_{n<\omega} ((b_{\alpha,n,1} \cdot b_{\beta,n,1}) + (-b_{\alpha,n,1} \cdot -b_{\beta,n,1})) \\
&= \{f \in \mathcal{C} | \forall n < \omega f(n,\alpha) = f(n,\beta)\}^{\circ} \ ,
\end{aligned}$$

denn das unendliche Produkt ergibt sich als Inneres des Abschlusses des mengentheoretischen Schnittes, wobei die Menge $\{f \in \mathcal{C} | \forall n < \omega \ f(n,\alpha) = f(n,\beta)\}$ abgeschlossen ist; dieses aber ist

$$= 0,$$

da die Menge $\{f \in \mathcal{C} | \forall n < \omega \ f(n,\alpha) = f(n,\beta)\}$ kein Inneres besitzt. Also sind die x_α im Booleschen Sinn paarweise verschiedene Teilmengen der natürlichen Zahlen.

Diese Andeutungen zeigen, wie man mit einer Booleschen Erweiterung $\aleph_2$ Teilmengen von ω zum Ausgangsmodell „adjungieren“ kann, um die Kontinuumshypothese zu verletzen. Viele Einzelheiten wären zu ergänzen. Besonders wichtig ist der Nachweis, daß das Boolesche Objekt $\check{\aleph}_2$ auch in der Erweiterung die zweite überabzählbare Kardinalzahl ist, d.h. $\| \check{\aleph}_1 \in \text{Kard} \|^B = 1$ und $\| \check{\aleph}_2 \in \text{Kard} \|^B = 1$.

Die Technik der Booleschen Modelle und die dazu äquivalente Forcingmethode sind in den letzten dreißig Jahren zu flexiblen Werkzeugen der axiomatischen Mengenlehre entwickelt worden. Eine Fülle kombinatorischer Eigenschaften läßt sich durch geeignete Wahl einer Booleschen Algebra in der entsprechenden Booleschen Erweiterung „erzwingen". So kann man z.B. die verallgemeinerte Kontinuumshypothese erzwingen und das Gödelsche Resultat reproduzieren. Andererseits kann man Boolesche Erweiterungen mit bizarren Werteverläufen der Exponentialfunktion konstruieren, wie:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_5,\ 2^{\aleph_1} = \aleph_{1868},\ 2^{\aleph_2} = \aleph_{\aleph_1+7}, \ldots$$

Die Kardinalzahlexponentiation für reguläre Kardinalzahlen unterliegt nur einigen einfachen Regeln, die bereits Hausdorff bekannt waren (siehe [H 1914, S. 54 ff.]). Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese ist also in hohem Maße von der Zermelo-Fraenkelschen Axiomatik unabhängig.

5. Deskriptive Mengenlehre

Nach der Darstellung der allgemeinen Mengenlehre strukturloser und geordneter Mengen untersucht Hausdorff in der zweiten Hälfte der *Grundzüge der Mengenlehre* speziellere Mengen. Durch sukzessive Verschärfung der Strukturvoraussetzungen gelangt Hausdorff zu topologischen, metrischen und euklidischen Räumen, die unter mengentheoretischen Gesichtspunkten betrachtet werden. Auch in der Forschung Hausdorffs beobachten wir eine Hinwendung zu konkreteren Strukturen. Hauptarbeitsgebiet nach den *Grundzügen* werden die von Hausdorff mitbegründete mengentheoretische Topologie und die deskriptive Mengenlehre, die sich mit „analytisch" definierbaren Mengen reeller Zahlen befaßt.

Hausdorffs Rückzug aus der allgemeinen Mengenlehre wird aus den Ausführungen über die Unvollständigkeiten der mengentheoretischen Axiome verständlich. In der Kardinalzahlarithmetik und der Theorie der Ordnungen stieß Hausdorff mit seinen Ergebnissen bereits an die Grenze dessen, das im System ZFC entscheidbar ist. Ein weiterer Fortschritt war hier mit naiven Methoden nicht zu erzielen.

Die deskriptive Mengenlehre beschränkt ihre Untersuchungen auf Mengen, die einfach definierbar oder von einer einfachen topologischen Gestalt sind, ursprünglich in der Absicht, die Resultate auf allgemeine Mengen auszudehnen. Sie geht zurück auf Cantors Untersuchungen über *lineare Punktmengen*, d.h. Teilmengen des reellen Kontinuums $\mathcal{R}$. Der Satz von Cantor und Ivar Bendixson:

> „*Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit* [d.h. ist abzählbar, d. Verf.] *oder sie hat die Mächtigkeit des Linearkontinuums*" [Ca 1884, S. 222 ff.]

bedeutet, daß die Kontinuumshypothese in der Form (2.1) für abgeschlossene Mengen gilt. Cantor sieht die Einschränkung auf abgeschlossene Mengen als vorübergehende Schwäche des Arguments an und kündigt einen Beweis der vollen Kontinuumshypothese an, „daß das Linearkontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse hat."

Im Satz von Cantor und Bendixson wird gezeigt, daß jede überabzählbare abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{R}$ eine *perfekte* Teilmenge umfaßt, d.h. eine nichtleere, abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte. Eine perfekte Menge ist von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Hausdorff [H 1916] und unabhängig Paul Alexandroff [Al 1916] verallgemeinern die Kontinuumshypothese auf Borelmengen:

> Wenn $B \subseteq \mathcal{R}$ eine überabzählbare Borelmenge ist, so besitzt B eine perfekte Teilmenge.

Schließt man weiter die Klasse der Borelmengen unter der Bildung von stetigen Bildern und Komplementen ab, gelangt man zur Klasse der *projektiven Mengen*, der wichtigsten *Punktklasse* für die Analysis und die Maßtheorie. Eine Menge $X \subseteq \mathcal{R}^n$ heißt *analytisch*, oder $\mathbf{\Sigma}^1_1$, wenn X stetiges Bild einer Borelmenge ist; X ist *co-analytisch*, oder $\mathbf{\Pi}^1_1$, wenn ihr Komplement $\mathcal{R}^n \setminus X$ analytisch ist.

Mikhail Souslin und Alexandroff können den Satz über die Existenz perfekter Teilmengen auf analytische Mengen ausdehnen, aber schon der co-analytische Fall übersteigt die Beweismöglichkeiten der Zermelo-Fraenkelschen Axiome. Im Modell L der konstruktiblen Mengen definiert Gödel ([Gö 1938], siehe auch [Jh 1980, S. 593]) ein Gegenbeispiel:

> ZFC $\vdash$ (es gibt eine überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält)$^{\mathrm{L}}$.

Ernst Specker [Sp 1957] verbessert das Gödelsche Ergebnis:

> Wenn jede überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge eine perfekte Teilmenge enthält, so gibt es eine unerreichbare Kardinalzahl im Modell L.

In dieser Situation ist $\aleph_1$, die kleinste überabzählbare Kardinalzahl in V, unerreichbar aus der Sicht des inneren Modells L. Solovay [So 1970] analysiert eine Forcing-Konstruktion von Levy [Le 1963] und zeigt, komplementär zu Speckers Resultat:

> Wenn es eine unerreichbare Kardinalzahl gibt, dann existiert eine vollständige Boolesche Algebra B, so daß für das Boolesche Modell V^B gilt:
> (a) $\|$ jede überabzählbare projektive Menge enthält eine perfekte Teilmenge $\|^B = 1$;
> (b) $\|$ jede projektive Menge ist Lebesgue-meßbar $\|^B = 1$.

Diese Sätze über innere Modelle und Boolesche Erweiterungen führen wie im vorausgehenden Kapitel zu Konsistenzresultaten:

> Kons(ZFC + es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl)

$\Longleftrightarrow$ Kons(ZFC + jede überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge hat eine perfekte Teilmenge)

$\Longleftrightarrow$ Kons(ZFC + jede überabzählbare projektive Menge hat eine perfekte Teilmenge + jede projektive Menge ist Lebesgue-meßbar).

Damit sind, auf „metamathematische" Weise, die exorbitanten Kardinalzahlen der Hausdorffschen Kardinalzahltheorie mit solchen Fragen der deskriptiven Mengenlehre und der Maßtheorie verbunden, über die Hausdorff gearbeitet hat (siehe [H 1914, S. 417 ff.]).

Gödel [Gö 1947] diskutierte die Möglichkeit, daß große Kardinalzahl-Axiome die Unvollständigkeiten des Systems ZFC auf natürliche Art ausgleichen könnten. Genügend starke Annahmen über die Existenz großer Kardinalzahlen scheinen tatsächlich jede sinnvolle Frage über *projektive* Mengen zu entscheiden. Als wichtigstes mengentheoretisches Resultat der letzten Jahre haben Donald Martin und John Steel [MaSt 1989] aus der Existenz unendlich vieler *Woodin-Kardinalzahlen* das Prinzip der *projektiven Determiniertheit* abgeleitet. Eine *Woodin-Kardinalzahl* κ ist durch die Existenz komplizierter Systeme von Ultrafiltern auf konfinal vielen Kardinalzahlen $< \kappa$ charakterisiert; eine Woodin-Kardinalzahl ist unerreichbar und sehr viel größer als die kleinste unerreichbare Zahl.

Die Theorie der *Determiniertheit* betrachtet „Spiele", in denen zwei Spieler I und II abwechselnd die Dezimalstellen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ einer Dezimalzahl $z = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots$ wählen. Ferner ist eine Gewinnmenge $A \subseteq \mathcal{R}$ vorab festgelegt, so daß I die Partie $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ genau dann gewinnt, wenn $z \in A$. A heißt *determiniert*, falls einer der beiden Spieler für das Spiel um A eine Gewinnstrategie besitzt.

Ein spieltheoretischer Satz von v. Neumann [vN 1928] über Zwei-Personen-Spiele mit vollständiger Informationen besagt, daß in endlichen Spielen immer Gewinnstrategien existieren. In Verallgemeinerung dieses Minimax-Theorems fordert das *Axiom der projektiven Determiniertheit* (PD), daß jede projektive Menge determiniert ist. Aus der projektiven Determiniertheit folgt eine umfassende Strukturtheorie für projektive Mengen (siehe [Mo 1980]), nach der z.B. jede überabzählbare projektive Menge eine perfekte Teilmenge besitzt und Lebesgue-meßbar ist.

Trotzdem haben große Kardinalzahlen keinen Einfluß auf die Kontinuumshypothese für *allgemeine* Mengen reeller Zahlen, denn die üblichen Forcing-Konstruktionen, mit denen man $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ oder $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ in einer Booleschen Erweiterung erzwingen kann, spielen sich weit unterhalb der kleinsten unerreichbaren Kardinalzahl ab. Auf die Woodin-Kardinalzahlen bezogen heißt das:

Kons(ZFC + es gibt eine Woodin-Kardinalzahl + $2^{\aleph_0} = \aleph_1$)

$\Longleftrightarrow$ Kons(ZFC + es gibt eine Woodin-Kardinalzahl + $2^{\aleph_0} > \aleph_1$).

6. Mengentheoretischer Relativismus

Die bisher skizzierten Ergebnisse sind repräsentativ für den gegenwärtigen Erkenntnisstand in der Mengenlehre. Um eine Orientierung in der Fülle der Konsistenzresultate zu ermöglichen, wollen wir die Entwicklung noch einmal zusammenfassen und den Begriff der *Konsistenzstärke* als Ordnungsprinzip einführen.

Die Objekte der Mathematik können, wie wir gesehen haben, als Mengen in einem naiven Sinn verstanden werden. Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome mit dem Auswahlaxiom (ZFC) sind stark genug, um die gewohnten Eigenschaften für die mengentheoretische Form der Objekte zu implizieren und um die überwiegende Mehrzahl mathematischer Fragen positiv oder negativ zu beantworten. Diese zunächst sehr befriedigende mengentheoretische Grundlegung der Mathematik führt nun selbst zu neuen Fragestellungen, etwa im Bereich der unendlichen Kombinatorik, die aber innerhalb der ZFC-Axiome nicht entscheidbar sind. Die axiomatische Mengenlehre ist gefordert, die Unvollständigkeiten des Systems ZFC zu analysieren und mögliche Erweiterungen der Axiome zu studieren. Mit verschiedenen Techniken gelingt es, Modelle eines Erweiterungssystems ZFC + A in Modelle eines anderen Systems ZFC + B zu überführen und damit relative Konsistenzresultate der Gestalt

$$\text{Kons}(\text{ZFC} + A) \Longrightarrow \text{Kons}(\text{ZFC} + B)$$

zu zeigen. In diesem Fall sagt man, daß A von größerer oder gleicher *Konsistenzstärke* als B ist, kurz: $A \geq B$. A und B sind *äquikonsistent*, oder von gleicher Konsistenzstärke, $A \sim B$, falls

$$A \leq B \text{ und } B \leq A.$$

So gesehen untersucht die axiomatische Mengenlehre die partielle Ordnung $\leq$ der Konsistenzstärken, und wir haben bereits einige Einzelfälle der Relation $A \leq B$ kennengelernt.

Eine besondere Rolle spielen in diesem Zusammenhang die großen Kardinalzahlaxiome. Viele mengentheoretische Axiome sind äquikonsistent mit einem großen Kardinalzahlaxiom, und da die großen Kardinalzahlen ihrer Größe und Stärke nach vergleichbar sind, wird man zu der Vermutung geführt, daß die $\leq$-Ordnung für natürliche Axiome linear ist. Dieses Programm ist umfassend in einem Übersichtsartikel von Aki Kanamori und Menachem Magidor [KaMa 1978] dargestellt.

Für die in diesem Aufsatz erwähnten Prinzipien sieht die Konsistenzstärke-Ordnung folgendermaßen aus:

es gibt unendlich viele Woodin-Kardinalzahlen $\sim$ jede projektive Menge reeller Zahlen ist determiniert

$$\bigvee$$

es gibt eine Woodin-Kardinalzahl
$\sim$ es gibt eine Woodin-Kardinalzahl + CH
$\sim$ es gibt eine Woodin-Kardinalzahl + $\neg$CH

$$\vee$$

es gibt eine schwach unerreichbare Kardinalzahl
$\sim$ es gibt eine stark unerreichbare Kardinalzahl
$\sim$ jede überabzählbare Π^1_1-Menge besitzt eine perfekte Teilmenge
$\sim$ jede projektive Menge reeller Zahlen ist Lebesgue-meßbar

$$\vee$$

$0 = 0 \sim \text{CH} \sim \neg\text{CH} \sim \text{GCH} \sim \ldots$

Prinzipien der Kardinalzahlarithmetik ordnen sich ebenso wie Annahmen der deskriptiven Mengenlehre in das lineare Schema ein. Dies weist auf tiefliegende Gemeinsamkeiten zwischen mathematischen Annahmen in entfernten Gebieten hin.

Für die mathematische Grundlagenforschung stellt sich die Frage, wie das große Spektrum der Erweiterungstheorien der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zu rechtfertigen und zu interpretieren ist. Die Antworten hierauf unterscheiden sich drastisch nach den jeweiligen philosophischen Standpunkten. Während ein „Platonist" in einem mathematischen Universum arbeitet, in dem alle mengentheoretischen Sätze entweder wahr oder falsch sind, ist für einen „Formalisten" auf Grund der Sätze von Gödel und Cohen die Kontinuumshypothese ebenso akzeptabel wie ihre Negation. Zwischen diesen Extremen findet sich eine Abstufung weiterer Standpunkte, deren ausführliche Darstellung den Rahmen dieses Aufsatzes überschreitet. Ich möchte mich auf einige Anmerkungen beschränken, die man als „mengentheoretischen Relativismus" charakterisieren könnte und die, wie wir sehen werden, durchaus mit Hausdorffs Ansätzen zur Erkenntnistheorie verträglich sind.

Der Abstraktionsprozeß, der schließlich zu den Zermelo-Fraenkelschen Axiomen führt, beginnt mit den direkt begreifbaren endlichen Mengen unserer Erfahrung und wird geleitet von der Intuition einer unendlichen diskreten Folge von Zeitpunkten und eines Kontinuums räumlicher Punkte. Man gelangt so zu den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ und den reellen Zahlen, wobei in die Bildung der einzelnen Zahlen bereits das Moment der Mengenbildung (nach Hausdorff die „Zusammenfassung von Dingen zu einem neuen Ding") eingeht.

Der Begriff der Menge ist grundlegend für die Mathematik, und die Axiomatisierungen der Mengenlehre beschreiben den Prozeß der Mengenbildung. Dabei sind die einzelnen Axiome weiterhin eng mit dem Endlichen verbunden: im Endlichen können wir Paarmengen, Vereinigungsmengen und Potenzmengen konkret bilden, und diese Eigenschaften werden nun für alle Mengen gefordert. Selbst das Unendlichkeitsaxiom, ohne das die Zermelo-Fraenkelschen Axiome nur so stark wie die

Peanoschen Axiome für die Zahlentheorie wären[7], fordert lediglich, daß es *eine* Kardinalität gibt, die direkt auf alle *endlichen* Kardinalzahlen folgt. Die höheren Kardinalitäten ergeben sich erst in der Entfaltung des Axiomensystems.

Die allgemeine Anerkennung der Zermelo-Fraenkelschen Axiome beruht sicher auch darauf, daß nur einige aus der endlichen Kombinatorik vertraute Gesetze zusammen mit der Existenz der Menge der natürlichen Zahlen gefordert werden. Weitere Axiome, die einen rein transfiniten Charakter haben und für die es kein Analogon im Endlichen gibt, z.B. die Kontinuumshypothese, entziehen sich den anschaulichen Entscheidungmöglichkeiten und werden nicht allgemein akzeptiert.

Aus dieser Sicht ist das System ZFC die Beschreibung einer *Oberstruktur* der Bereiche $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$, der bezüglich der Bildung gewisser „Zusammenfassungen" abgeschlossen ist. Ähnlich wie bei den bekannten Zahlbereichserweiterungen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$ führt der Übergang zur Oberstruktur zu Vereinfachungen und Vereinheitlichungen, und tatsächlich gibt es Eigenschaften, die nur über den Umweg einer Oberstruktur beweisbar sind. Es gibt aber keinen Grund, weshalb die mengentheoretische Oberstruktur eindeutig bestimmt sein sollte. Man beachte, daß die Eindeutigkeit der gewöhnlichen Zahlbereiche *in der Mengentheorie* gezeigt wird, ein ähnlicher Schluß ist auf die Mengenlehre selbst nicht anwendbar.

Die verschiedenen Erweiterungssysteme des Systems ZFC entsprechen unterschiedlichen Oberstrukturen für die Mathematik. Dabei kann es für die Betrachtung einer gegebenen Fragestellung vorteilhaft sein, eine spezielle mengentheoretische Oberstruktur zu wählen. Zum Beispiel vereinfachen sich maßtheoretische Überlegungen in Modellen der Mengenlehre, in denen jede projektive Menge reeller Zahlen Lebesgue-meßbar ist.

Besonders interessant sind Eigenschaften, die beim Übergang zu inneren Modellen oder Booleschen Erweiterungen nicht verändert werden und die als *absolut* bezeichnet werden. Diese Eigenschaften lassen sich manchmal mit folgender bemerkenswerten Methode beweisen: Man führt den Beweis in einer geeigneten Booleschen Erweiterung des Universums und verweist dann auf die Absolutheit der Eigenschaft. Die Untersuchung von Modellen der Mengenlehre dient also nicht nur metamathematischen Zwecken, sondern kann, in besonderen Situationen, zum Beweis-Werkzeug werden.

Wie steht es nun mit dem Wahrheitsgehalt der mengentheoretischen Axiome? Gilt die Kontinuumshypothese? Gibt es unerreichbare Kardinalzahlen? Hier ist zunächst der Begriff der „Existenz" zu hinterfragen. Existenz wird durch Sinneseindrücke und Bewußtseinsvorgänge vermittelt und die Existenz abstrakter Entitäten wie die der Menge $\mathcal{N}$ aller natürlichen Zahlen hat eine grundsätzlich andere Qualität als die Existenz eines Bleistifts. Gleichwohl können abstrakte unendliche Existenzen realer erscheinen als manches komplizierte endliche Gebilde. Die Ordinalzahl ω erscheint deutlicher und harmonischer als eine zufällig gewählte Zahl der Größenordnung $10^{10^{10}}$. Wahrscheinlich können wir die Fülle der konkreten, endlichen Existenzen nur einordnen und beherrschen durch Bezug auf idealisierte unendliche Begriffsbildungen.

[7]Hier ist an eine Formulierung der Peano-Axiome in der Logik erster Stufe gedacht.

Die parallele Betrachtung von Systemen wie ZFC + CH und ZFC + ¬CH stellt nunmehr keinen Widerspruch dar. Beide Erweiterungssysteme repräsentieren denkbare Oberstrukturen der gewöhnlichen Mathematik. Indem wir beide Möglichkeiten zulassen, erweitern wir unsere mathematischen Freiheiten.

Diese Überlegungen treffen ebenso auf die großen Kardinalzahl-Axiome zu. Da sie sich kanonisch als Maß von Konsistenzstärken ergeben, kommt den großen Kardinalzahlen ein besonderes „Existenzrecht" zu. Sie verkörpern Konsistenzstärken in einer rein kombinatorischen Form. Die anscheinende Linearität der Ordnung der Konsistenzstärken bedeutet, daß wir mit den großen Kardinalzahlen einen kanonischen Weg zur Behebung von Unvollständigkeiten des Systems ZFC gehen.

Aber auch wenn gewisse große Kardinalzahlen, etwa die Woodinschen Kardinalzahlen, entgegen der vorherrschenden Ansicht inkonsistent wären, so hätte dies durchaus positive Auswirkungen für das System ZFC. Nach Verallgemeinerungen des Jensenschen Überdeckungssatzes [DeJe 1975, Do 1982] gäbe es dann nämlich eine enge Beziehung zwischen dem Mengenuniversum V und einem konstruktiblen inneren Modell. Einige Eigenschaften des konstruktiblen Modells würden sich auf V übertragen, d.h. sie wären in ZFC beweisbar. Auf jeden Fall erscheint es für gewisse Bereiche der unendlichen Mathematik richtig, Oberstrukturen mit großen Kardinalzahlen zuzulassen, zur Bereicherung der Beweismöglichkeiten und zugleich als Test ihrer Konsistenz.

7. Chaos in kosmischer Auslese

Die Ausformung der Mengenlehre zu einer axiomatischen Theorie mit Fragen der Unabhängigkeit und Vollständigkeit von Axiomensystemen begann im Ansatz bereits zur Zeit Hausdorffs. Zermelo [Ze 1904, Ze 1908] formulierte Axiome, die stark genug waren, um den Cantorschen Wohlordnungssatz abzuleiten. Fraenkel und Skolem erkannten, daß das Zermelosche System um das Ersetzungsprinzip erweitert werden mußte, schon um die Existenz der Kardinalzahl $\aleph_\omega$ zeigen zu können. Das Unabhängigkeitsresultat, das der Einführung des Ersetzungsaxioms zugrundeliegt, wurde von Skolem im wesentlichen durch die Angabe eines inneren Modells für die Zermeloschen Axiome gezeigt. Skolem und von Neumann setzen für ihre mengentheoretischen Untersuchungen konsequent die Sprache der formalen Logik ein. Skolem sieht die in der Logik, d.h. in der sprachlichen Beschreibung, begründete Relativität des Mengenbegriffs und schreibt:

> *„Weil die Zermelo'schen Axiome den Bereich B nicht eindeutig bestimmen, ist es sehr unwahrscheinlich, dass mit Hilfe dieser Axiome alle Mächtigkeitsprobleme entscheidbar sein sollten. Es ist z. B. sehr wohl möglich, dass das sogenannte Kontinuumsproblem, nämlich ob* $2^{Alef_0} >$ *oder* $= Alef_1$ *ist, auf dieser Grundlage überhaupt nicht lösbar ist; es braucht eben nichts darüber entschieden zu sein. Der Sachverhalt kann genau derselbe sein wie im folgenden Falle: Es ist ein unbestimmter*

> *Rationalitätsbereich gegeben, und man fragt, ob in diesem Bereiche eine Grösse x vorhanden ist, sodass $x^2 = 2$ ist. Dies ist eben nicht bestimmt, wegen der Mehrdeutigkeit des Bereiches.“* [Sk 1922, S. 69]

Ein bedeutendes Unabhängigkeitsresultat, das nicht nur formalen axiomatischen Charakter besitzt, war Fraenkels Nachweis, daß die Negation des Auswahlaxioms mit einer etwas abgeschwächten Version der Zermelo-Fraenkelschen Axiome verträglich ist [Fl 1922]: Die Theorie ZFU beschreibt ein ZF-ähnliches Mengenuniversum, in dem aber nicht nur ein, sondern mehrere leere Objekte nebeneinander zugelassen sind, sogenannte *Urelemente*. Urelemente formalisieren die Vorstellung von Grundobjekten, deren interne Struktur nicht relevant ist und aus denen Mengen durch Zusammenfassungen gebildet werden. Dies entspricht dem üblichen Vorgehen in der Mathematik. Fraenkel konstruiert in der Theorie ZFU ein *Permutationsmodell:* eine Permutation der Menge der Urelemente läßt sich auf das ganze Mengenuniversum kanonisch fortsetzen. Diejenigen Elemente, die gegenüber „fast allen“ solchen Permutationen invariant sind, werden in das Fraenkelsche Modell aufgenommen. In dem inneren Modell kann es bei geeigneter Wahl der Menge der Urelemente und des „fast alle“-Filters auf der Menge der Permutationen keine Bijektion zwischen der Menge der Urelemente und einer Ordinalzahl geben, denn eine solche Bijektion wird nur von der identischen Permutation invariant gelassen. In dem Permutationsmodell ist also das Auswahlaxiom falsch.

Schließlich fallen die Gödelschen Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssätze, die in besonderer Weise die Problematik des naiven und des formalen Mengenverständnisses aufzeigen, in Hausdorffs aktive Schaffensperiode.

Hausdorff aber hat sich von diesen Entwicklungen nur wenig beeinflussen lassen. In der zweiten, vollständig überarbeiteten Auflage seines Buches, die 1927 unter dem Titel *Mengenlehre* [H 1927] erschienen ist, bespricht Hausdorff die Antinomie, die sich aus der „Menge aller Kardinalzahlen“ ergibt und die bereits von Cantor erkannt wurde [Ca 1932, S. 443 ff.]. Hausdorff schreibt:

> *„Daraus entsteht nun die Unsicherheit, ob nicht auch andere, vielleicht alle unendlichen Mengen solche widerspruchsbehafteten Scheinmengen, „Unmengen“ sein mögen, und sodann die Aufgabe, diese Unsicherheit wieder zu beseitigen; die Mengenlehre ist auf neuer (axiomatischer) Grundlage so aufzubauen, daß Antinomien ausgeschlossen sind. Wir können auf die dahin zielenden, von E. Zermelo begonnenen und sicheren Erfolg versprechenden Untersuchungen in diesem Buche nicht eingehen und müssen unseren „naiven“ Mengenbegriff festhalten.“* [H 1927, S. 34]

Diese Äußerung steht im Einklang mit Hausdorffs Bemerkungen in den wesentlich früheren *Grundzügen einer Theorie der geordneten Mengen* [H 1908, S. 436]:

> *„Einem Beobachter, der es auch der Skepsis gegenüber nicht an Skepsis fehlen läßt, dürften die ‚finitistischen‘ Einwände gegen die Mengenlehre ungefähr in drei Kategorien zerfallen: in solche, die das ernst-*

> *hafte Bedürfnis nach einer, etwa axiomatischen, Verschärfung des Mengenbegriffs verraten; in diejenigen, die mitsamt der Mengenlehre die ganze Mathematik treffen würden; endlich in einfache Absurditäten einer an Worte und Buchstaben sich klammernden Scholastik. Mit der ersten Gruppe wird man sich heute oder morgen verständigen können, die zweite darf man getrost auf sich beruhen lassen, die dritte verdient schärfste und unzweideutigste Ablehnung. In der vorliegenden Arbeit werden diese drei Reaktionen stillschweigend vollzogen."*

Deutlich ist hier Hausdorffs Haltung zu Grundlagenfragen der Mathematik beschrieben. In seinen Veröffentlichungen, aber auch in seinen erhaltenen Vorlesungen, Aufzeichnungen und Briefen beschäftigt sich Hausdorff niemals tiefer mit der mathematischen Logik oder der Axiomatik der Mengen. Ungeachtet aller formalen Einwände sieht Hausdorff im Mengenbegriff und in der Mengenbildung einen „primitiven, allen Menschen vertrauten Denkakt, der einer Auflösung in noch ursprünglichere Akte vielleicht weder fähig noch bedürftig ist" [H 1927, S. 11]. Der Erfolg der Hausdorffschen Bücher, die ein wesentlicher Impuls für die moderne Mathematik der Strukturen waren, beruht auch auf der Einfachheit, die sich mit der Beschränkung auf den unmittelbar verstandenen naiven Mengenbegriff ergibt.

Dennoch hat Hausdorff die metamathematischen Entwicklungen in der Mengenlehre wohl eher aus mathematisch-pragmatischen als aus prinzipiellen Gründen unberücksichtigt gelassen. Unter dem Pseudonym Paul Mongré veröffentlichte er 1898 die Schrift *Das Chaos in kosmischer Auslese – ein erkenntnistheoretischer Versuch* [H 1898], deren erkenntnistheoretischer Relativismus erstaunliche Parallelen zum dargestellten mengentheoretischen Relativismus aufweist. Die Hausdorffsche Philosophie soll hier nur soweit skizziert werden, daß ein Vergleich mit der mathematischen Grundlagenproblematik möglich wird. Eine weitergehende Darstellung und Einordnung des Hausdorffschen Ansatzes wäre interessant und wünschenswert.

Paul Mongré – Hausdorff sieht die Welt als „Chaos", das sich einem Bewußtsein in Form von Sinneseindrücken vermittelt. Das Bewußtsein nimmt eine „kosmische Auslese" vor, in welcher es versucht, empirische Fakten mit idealisierten Weltbildern („Kosmen") in Einklang zu bringen. Die Auswahl der als relevant gesehenen Fakten und des Weltbildes beruhen auf psychologischen, ästhetischen oder sozialen Bedingungen, die für verschiedene Bewußtseinsträger unterschiedlich sind. Hausdorff stellt nun anhand mathematischer Beispiele dar, wie unterschiedliche Weltläufe mit einer einzigen Folge von Sinneseindrücken verträglich sein können. Das Bewußtsein könnte, weil es selbst in Raum und Zeit existiert, eine stetige vierdimensionale Raumzeit wahrnehmen, obwohl Raum und Zeit „von außen" gesehen unstetig oder entgegen der üblichen Ordnung durchlaufen werden könnten. Selbst die „wahre" Dimension der Raumzeit ist für das Bewußtsein nicht bestimmbar, denn nach Cantor sind $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ gleichmächtig. Hausdorff folgert, daß eine wirkliche Erklärung der Welt, eine Metaphysik, nicht möglich ist, da wir niemals die Struktur der Welt entscheiden können.

Wenn wir diese Gedanken auf den Bereich der Mengen übertragen, so werden wir zunächst mit einem Chaos konkreter Mengen konfrontiert, das die Mengenlehre als Kosmos sehen möchte. Als Kosmos durchgesetzt hat sich das Cantorsche Mengenbild in Form der Zermelo-Fraenkelschen Axiome. Es verwundert aber vom erkenntnistheoretischen Standpunkt Hausdorffs nicht, daß der Kosmos ZFC keine vollständige Beschreibung des Mengenchaos darstellt. Verschiedene Erweiterungen von ZFC sind mit den üblichen mathematischen Erfahrungen, die die Ausgangsdaten der Mengenlehre sind, verträglich, und es besteht keine Möglichkeit, etwa die Kontinuumshypothese zu entscheiden. Diese Erkenntnissituation ist nach Hausdorff/Mongré kein Fehler unseres Mengenbegriffs oder unserer Methoden. Der Mengenbegriff in seiner vollen Allgemeinheit und Freiheit, der das Anliegen der Cantorschen Mengenlehre ist (siehe [Ca 1932, S. 182]), erschließt sich vielmehr erst in der Vielzahl der konsistenten Erweiterungen der Zermelo-Fraenkelschen Axiome.

Obwohl Hausdorff dieses Programm zu seiner Zeit nicht sehen konnte und er metamathematische Untersuchungen für wenig fruchtbar gehalten haben mag, so sind diese Ergebnisse doch in weitgehendem Einklang mit der erkenntnistheoretischen Position, die Paul Mongré gegen Ende des *Chaos in kosmischer Auslese* beschreibt:

> „*Werden wir also den* kosmocentrischen *Aberglauben los wie früher den geocentrischen und anthropocentrischen; erkennen wir, dass in das Chaos eine unzählbare Menge kosmischer Welten eingesponnen ist, deren jede ihren Inhabern als einzige und ausschliesslich reale Welt erscheint und sie verleiten möchte, ihre qualitativen Merkmale und Besonderheiten dem transcendenten Weltkern beizulegen. Aber dieser Weltkern entzieht sich jeder noch so losen Fessel und wahrt sich die Freiheit, auf unendlich vielfache Weise zur kosmischen Erscheinung eingeschränkt zu werden; er gestattet das Nebeneinander aller dieser Erscheinungen, die als specielle Möglichkeiten, als begrifflich irgendwie abgegrenzte Theilmengen in seiner Universalität enthalten sind – ja er ist nichts anderes als eben dieses Nebeneinander und darum transcendent für die einzelne Erscheinung, die in sich selbst ihr eigenes abgeschlossenes Immanenzgebiet hat.*“

Schriften und Bücher von Felix Hausdorff

[H 1898] (unter dem Pseudonym *Paul Mongré*), *Das Chaos in kosmischer Auslese – ein erkenntnisskritischer Versuch*, Verl. C. G. Naumann, Leipzig, 1898.

[H 1904] Der Potenzbegriff in der Mengenlehre, *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver.* **13** (1904), 569–571.

[H 1906] Untersuchungen über Ordnungstypen, *Sitzungsber. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Cl.* **58** (1906), 106–169.

[H 1907] Untersuchungen über Ordnungstypen, *Sitzungsber. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl.* **59** (1907), 84–159.

[H 1907] Über dichte Ordnungstypen I, *Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver.* **16** (1907), 541–546.

[H 1908] Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, *Math. Ann.* **65** (1908), 435–505.

[H 1914] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[H 1916] Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen, *Math. Ann.* **77** (1916), 430–437.

[H 1927] *Mengenlehre*, 2., neubearb. Aufl. v. [H 1914], Berlin, 1927.

Weitere Literatur

[Al 1916] Alexandroff, P., Sur la puissance des ensembles mesurables B, *Comptes Rendus* **162** (1916), 323–325.

[Be 1977] Bell, J. L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1977.

[Ca 1874] Cantor, G., Über ein Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal f. d. reine und angewandte Math.* **77** (1874), 258–262; zitiert nach [Ca 1932, S. 115–118].

[Ca 1878] Cantor, G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Journal f. d. reine und angewandte Math.* **84** (1884), 242–258; zitiert nach [Ca 1932, S. 119–133].

[Ca 1883] Cantor, G., Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, *Math. Ann.* **21** (1883), 51–58 u. 545–591; zitiert nach [Ca 1932, S. 139–204].

[Ca 1884] Cantor, G., Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, *Math. Ann.* **23** (1884), 453–488; zitiert nach [Ca 1932, S. 210–246].

[Ca 1895] Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Math. Ann.* **46** (1895), 481–512; zitiert nach [Ca 1932, S. 282–351].

[Ca 1932] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. v. E. Zermelo, Springer-Verlag, Berlin, 1932; Nachdruck 1980.

[Co 1963] Cohen, P.J., The independence of the continuum hypothesis, I and II, *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences USA* **50** (1963), 1143–1148 und **51** (1964), 105–110.

[DeJe 1975] Devlin, K. J. und Jensen, R. B., Marginalia to a Theorem of Silver, in: *ISILC Logic Conference, Kiel*, hrsg. v. G. Müller u. a., Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Do 1982] Dodd, A. J., *The Core Model*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **61**, Cambridge, 1982.

[Dr 1974] Drake, F. R., *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*, North Holland, Amsterdam, 1974.

[EkMe 1990] Eklof, P. und Mekler, A., *Almost Free Modules, Set-theoretic Methods*, Amsterdam, 1990.

[Fe 1979] *Mengenlehre*, hrsg. v. U. Felgner, Wiss. Buchges., Darmstadt, 1979.

[Fl 1922] Fraenkel, A. A., Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.* **86** (1922), 230–237; auch in [Fe 1979], 49–56.

[Fr 1893] Frege, F. L. G., *Grundgesetze der Arithmetik,* Band 1, Pohle, Jena, 1893.

[Gö 1930] Gödel, K., Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **37** (1930), 349–360.

[Gö 1931] Gödel, K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **38** (1931), 173–198.

[Gö 1938] Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences USA* **24** (1938), 556–557.

[Gö 1947] Gödel, K., What is Cantor's Continuum Problem, *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 515–525.

[Hi 1900] Hilbert, D., Mathematische Probleme, *Nachr. d. Akad. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1900), 253–297.

[Hi 1922] Hilbert, D., Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, *Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. Band 1* (1922), 157–177, zitiert nach: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, Springer-Verlag (1935), 157–177.

[HiAc 1928] Hilbert, D. und Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin, 1928.

[Je 1972] Jensen, R. B., The fine structure of the constructible hierarchy, *Annals of Math. Logic* **4** (1972), 229–308.

[Jh 1978] Jech, T. J., *Set Theory*, Acad. Press, New York, 1978.

[Ka 1994] Kanamori, A., *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[KaMa 1978] Kanamori, A. und Magidor, M., The evolution of large cardinals in set theory, in: *Higher Set Theory*, Hrsg. Müller, G. H. und Scott, D. S., Springer-Verlag, 1978.

[Ko 1989] Koppelberg, S., *Handbook of Boolean Algebras*, hrsg. v. Monk, J. D., North-Holland, 1989.

[Ku 1980] Kunen, K., *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.

[KuVa 1984] Kunen, K. und Vaughan, J. (Hrsg.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984.

[Le 1963] Levy, A., Independence results in set theory by Cohen's method IV, *Not. Amer. Math. Soc.* **10** (1963), 593.

[MaSt 1989] Martin, D. A. und Steel, J. R., A Proof of Projective Determinacy, *Journal Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 71–125.

[Mi 1917] Mirimanoff, D., Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles, *L'Enseignement Mathématique* **19** (1917), 37–52.

[Mk 1989] Monk, J.D. (Hrsg.), *Handbook of Boolean Algebras*, North-Holland, 1989.

[ML 1983] MacLane, S., The Health of Mathematics, *The Math. Intelligencer* **5** (1983), 53–55.

[Mo 1980] Moschovakis, Y. N., *Descriptive Set Theory*, North-Holland, 1980.

[vN 1923] v. Neumann, J., Zur Einführung der transfiniten Zahlen, *Acta Univ. Szeged, Sect. Math.* **1** (1923), 199–208.

[vN 1928] v. Neumann, J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928), 295–320.

[Po 1882] Poincaré, H., Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica* **1** (1882), 1–62.

[Ru 1903] Russell, B., *The Principles of Mathematics. Vol. 1*, Cambridge, 1903.

[Sch 1927] Schoenfliess, A., Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen, *Acta Mathematica* **50** (1928), 1–23.

[Sk 1922] Skolem, T., Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker, 1922, nachgedruckt in [Fe 1979].

[So 1970] Solovay, R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Math., Ser. 2* **92** (1970), 1–56.

[Sp 1957] Specker, E., Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom), *Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundl. d. Math.* **3** (1957), 173–210.

[Ze 1904] Zermelo, E., Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.* **59** (1904), 514–516.

[Ze 1908] Zermelo, E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Math. Ann.* **65** (1908), 261–281.

Mathematisches Institut
Beringstraße 4
D – 53115 Bonn
GERMANY