Integralrechnung

Um zu verstehen, wie verkorkst die Integralrechnung in drei Schulbuchwerken vorgeführt wird, ist ein Blick in die Geschichte hilfreich.

Im Sommer 1899 hat J.L.Heiberg eine verloren geglaubte Schrift des Archimedes als überschriebenes Manuskript wiederentdeckt. Er konnte den ursprünglichen Text fast vollständig rekonstruieren, die heute so genannte *Methodenlehre* des Archimedes. Es handelt sich um einen Brief an Eratosthenes, in dem Archimedes u.a. erklärt, wie er den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes herausgefunden hat. Er hat das Parabelsegment in achsenparallele eindimensionale (später: infinitesimale) Streifen zerschnitten und so an einen Waagebalken verschoben, dass sie im Gleichgewicht mit entsprechenden Streifen eines Dreiecks waren. Der Abstand des Dreiecksschwerpunktes vom Waagedrehpunkt hat ihm dann das Gesamtgewicht der Parabelstreifen geliefert. Dies Vorgehen galt damals nicht als legitim, deshalb hat Archimedes anschließend mit seiner Exhaustionsmethode gezeigt, dass die aus der Gleichgewichtsüberlegung erhaltene Zahl wirklich der Flächeninhalt der Parabel ist. (Die Exhaustionsmethode funktionierte damals nur, wenn man das richtige Ergebnis kennt.)

Diese Argumentation ist der älteste bekannte Vorläufer der Integralrechnung.

Einige Jahre vor Erfindung der Differentialrechnung durch Leibniz und Newton hatten Fermat und Descartes die analytische Geometrie eingeführt. Seitdem konnten Kurven durch Gleichungen beschrieben werden. Es gab zwei ungelöste und anscheinend unzusammenhängende die Mathematiker beschäftigende Probleme:

Wie konnte man zu solchen gleichungsdefinierten Kurven deren Tangenten finden? und
Wie konnte man Flächeninhalte bestimmen, die von solchen Kurven berandet waren?

Das Tangentenproblem wurde durch die Differentialrechnung gelöst. Das war eine Theorie, die den von Alters her bekannten anschaulichen Begriff "Steigung über einem Intervall" in die zu dem jeweiligen Problem gehörende *richtige Steigung über einem Punkt* verallgemeinerte. Das hat Newton, noch während er an der Formulierung der Differentialrechnung arbeitete, dazu geführt, Paare von Funktionen aufzuschreiben, die wir heute als Paare von Funktionen und ihren Ableitungen bezeichnen.

Als Hauptsatz der Differentialrechnung wurde folgende Entdeckung bezeichnet: Betrachtet man den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion f von einer festen Stelle 0 bis zu der Stelle x als Funktion $A(x)$, so gilt: $A'(x) = f(x)$. Diese Entdeckung setzt voraus, dass der Begriff der Ableitung *vorher* erfunden ist. Wegen der inzwischen entstandenen umfangreichen Listen von Funktionen und ihren Ableitungen löste diese Entdeckung in sehr vielen Fällen ein bis dahin unangreifbares, fast 2000 Jahre altes Problem. Das rechtfertigt den Namen *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

In der Neuzeit hat die Konstruktion der Integrale zu jeder stetigen Funktion f eine Funktion F geliefert, für die bewiesen werden konnte $F' = f$. Deshalb kann man mit diesen Integralen Flächeninhalte unter den Graphen von Funktionen berechnen und das wird sehr einfach, wenn man Listen von Stammfunktionen hat. Diese Übersicht zeigt, dass die eigentliche Bedeutung des Hauptsatzes ausgeblendet wird, wenn man sich auf die heute üblichen Bestandsrekonstruktionen konzentriert, Rekonstruktion aus Änderungsraten, die als Ableitungen der Bestände *definiert(!)* sind.

Und jenseits dieser geometrischen Probleme wuchs die Bedeutung der Analysis durch ihre Anwendungen in Wissenschaft und Technik ins Gigantische.

In drei verschiedenen Lehrwerken für die Schule steht über der Einführung der Integralrechnung die für viele Anwendungen wichtige Frage:

Wie rekonstruiert man eine Bestandsfunktion aus ihrer Änderungsrate?

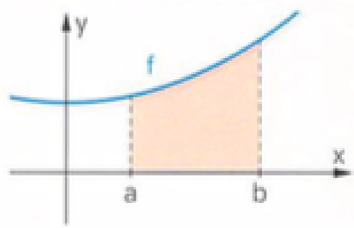
Dabei sind die Bestandsfunktionen Funktionen der Zeit, etwa $B(t)$,
und die Änderungsraten $b(t)$ sind als deren Ableitungen *definiert*: $b(t) = B'(t)$.

Man würde also erwarten, dass man bei gegebenem $b(t)$ eine Stammfunktion $B(t)$ wie schon zu Newtons Zeit zu finden versucht - besonders vor dem Hintergrund, dass zehn Seiten später das Integrieren sich völlig auf das Aufsuchen von Stammfunktionen beschränkt und natürlich Stammfunktionen so einfach definiert werden, wie es eben ist: Eine Stammfunktion F von f ist eine Funktion mit $F' = f$. Und jede Funktion, die die Schülerinnen und Schüler differenzieren können, erkennen sie natürlich auch als Stammfunktion ihrer Ableitung. Damit wäre das formulierte Rekonstruktionsproblem im Handumdrehen erledigt - bis auf diejenigen Änderungsraten, zu denen man keine Stammfunktion kennt.
Ich beglückwünsche die Lehrerinnen und Lehrer, die das so machen.

In den Schulbüchern passiert das aber nicht. Stattdessen werden die Änderungsraten $b(t)$ als Funktionen gegeben, deren Graphen *stückweise geradlinig* sind. Die zugehörigen Bestandsfunktionen werden Stück für Stück elementar rekonstruiert und dann als Flächeninhalt unter dem Graphen von b *interpretiert*. Weil Änderungsraten negativ sein können, werden Flächen unterhalb der x-Achse negativ gerechnet – "*Man sricht hier von orientierten Flächeninhalten*" ist die ganze Erklärung. Sogar tabellarisch gegebene Funktionen werden stückweise linear ergänzt und ebenso behandelt!
In einem zweiten Abschnitt darf man zu quadratischen und kubischen Änderungsraten die Bestandsfunktionen ermitteln und durch Differenzieren verifizieren. Danach wird der Begriff Stammfunktion definiert und an einem Exkurs aus der Physik gezeigt, wie nützlich das ist: Beschleunigungen $a(t)$ sind Änderungsraten von Geschwindigkeiten $v(t)$, also $v'(t) = a(t)$, weiter sind Geschwindigkeiten Änderungsraten von geradlinig zurückgelegten Wegen $s(t), s'(t) = v(t)$. Speziell $a(t) = g = const \Rightarrow v(t) = g \cdot t \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Nur, das hätte man auch schon am Anfang machen können, mit Flächeninhalt hat das nichts zu tun.

Das Kapitel Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beginnt in einem der drei Werke so (Kopie!):

Bisher haben Sie Bestandsrekonstruktionen immer mit Beginn bei $x = 0$ betrachtet und untersucht. Jetzt werden die Anfangswerte variiert. Um dies darstellen zu können, wird eine neue Schreibweise eingeführt:



$\int_a^b f(x)\,dx$ gibt die Bestandsentwicklung in [a; b] an, dabei ist a (linke Grenze) der Startwert. In den bisherigen Untersuchungen galt immer $a = 0$. Der Ausdruck heißt Integral und wird gelesen „Integral f(x) von a bis b".

Das muss man mehrmals lesen, um zu glauben, dass es da steht.

Danach werden *Integralfunktionen* definiert: $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, die sich also von den bisherigen Bestandsfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden. Dementsprechend heißt der

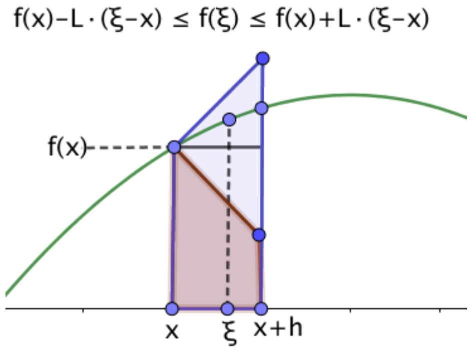
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Teil 1:
$I'_a(x) = f(x)$, Integralfunktionen sind Stammfunktionen.
Und Teil 2 heißt: $I_a(b) = F(b) - F(a)$.

Mit anderen Worten, der Hauptsatz gilt, weil man eine neue Schreibweise eingeführt hat. Mehr Kränkung kann man Newton eigentlich nicht antun.

Da die Anwendung der Differential- und Integralrechnung zur Berechnung von krummlinig berandeten Flächeninhalten von Anfang an zu deren Erfolgen zählte, schildere ich, was sich davon retten lässt. Dass man die Flächeninhalte unter den Graphen von (auf der Schule vorkommenden) Funktionen als wohldefinierte Größen ansieht, geht auf der Schule sicher nicht anders. Aber muss man wirklich durch die Bezeichnungen behaupten, dass man etwas über Integrale erklärt hätte, genügt es nicht, den Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen a und x als $A_a f(x)$ zu bezeichnen? Wir brauchen auch nicht mit geheimnisvollem Unterton über stetige Funktionen f zu reden, wir können voraussetzen, dass f differenzierbar ist und dass in $[x, x+h]$ gilt $|f'| \le L$. Dann zeigt der Monotoniesatz

$$\xi \in [x, x+h] \;\Rightarrow\; \boxed{l_-(\xi) := f(x) - L \cdot (\xi - x) \le \; f(\xi) \; \le f(x) + L \cdot (\xi - x) =: l_+(\xi)}$$

Im Intervall $[x, x+h]$ liegt der Graph von f also unter der Geraden $l_+(\xi) = f(x)+L\cdot(\xi-x)$ und über der Geraden $l_-(\xi) = f(x) - L \cdot (\xi - x)$. Daher gilt für den Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall $[x, x+h]$:



$$(f(x) - L \cdot h/2) \cdot h \le A_a f(x+h) - A_a f(x) \le (f(x) + L \cdot h/2) \cdot h.$$

Und wenn man schon Analysis unterrichtet, dann muss dabei so viel herauskommen, dass die Schülerinnen und Schüler aus dieser Ungleichung ablesen (notfalls mit dem Tip: dividiere durch h und berechne $\lim_{h \to 0}$):

$A_a f$ ist differenzierbar und $(A_a f)' = f$,

oder: *der Flächeninhalt von a bis x ist in der Tat eine Stammfunktion von f.*

Damit können die in den Büchern vorkommenden Flächenaufgaben erledigt werden. Nach dem zuerst behandelten Rekonstruktionsproblem ist mit dieser Folgerung aus dem Monotoniesatz eine zweite Sorte von Anwendungen erreicht, die historisch sehr wichtig waren.

Jetzt stellt sich doch wohl die Frage: *"Wenn der Flächeninhalt unter dem Graphen von f eine Stammfunktion von f liefert, warum macht man überhaupt diese Integralrechnung?"* Die Antwort lautet: *"Erstens können viel kompliziertere Funktionen integriert werden als solche, die Stammfunktionen besitzen. Zweitens ist es ein kompliziertes Problem, welche Teilmengen der Ebene Flächeninhalte besitzen und Integrale lösen das Problem oftmals."*

Wie geht es in allen drei Schulbuchwerken weiter? Obwohl der Hauptsatz schon behandelt (genauer: misshandelt) worden ist, muss die Autoren etwas beunruhigt haben, denn es gibt ein weiteres Kapitel *"Integrieren ohne Stammfunktionen"*. Obwohl der Hauptsatz sagt, dass stetige Funktionen Stammfunktionen haben (eben die Integrale $\int_a^x f(u)du$) wird dies Kapitel damit begründet, dass der verwendete Rechner zu $f(x) = 2^{-x^2}$ *keine Stammfunktion findet.* Nun werden, was richtig ist, Produktsummen betrachtet und nur die Veranschaulichung greift auf die Rechtecksflächen einer Treppenfunktionsapproximation von f zurück. Unter der noch einmal wiederholten Überschrift *"Eine Definition des bestimmten Integrals ohne Rückgriff auf Stammfunktionen"* werden Integrale als Grenzwerte äquidistanter Produkt-**Ober**summen definiert. Diese Grenzwerte "von oben" können durchaus existieren, ohne dass die Funktion integrierbar ist. Außerdem gibt es keinen Versuch, diese "Integrale" nach der oberen Grenze zu differenzieren. Wegen der Beschränkung auf äquidistante Produktsummen ist das auch schwierig. Allein, wo bleibt der Zusammenhang zwischen diesen Grenzwerten und den Stammfunktionen? Nur für die Potenzfunktionen mit Exponenten 2,3,4 werden die äquidistanten Produktsummen mit Hilfe *angegebener* Summenformeln berechnet und diese Beispiele(!) zeigen, dass sich die schon bekannten Stammfunktionen als Grenzwerte ergeben. Logische Argumentation gibt es nicht, aber es gibt viele Seiten mit immer wieder ähnlichen Aufgaben, in denen die Rezepte geübt werden.

Ich will noch leicht erreichbare und (zu) schwierige Ergebnisse deutlicher gegenüberstellen. Zum Vergleich erinnere ich daran, dass man auch bei der Konvergenz von Folgen zwei Situationen unterscheiden sollte:
(i) Entweder man kann den Grenzwert ausrechnen, dann muss man nur zeigen, dass die Folgenglieder diesem so nahe kommen, wie die Grenzwertdefinition es verlangt.
(ii) Oder man kann den Grenzwert nicht ausrechnen, dann muss man durch Appell an die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Existenzproblem lösen und anschließend muss man zeigen, dass die Folge gegen diesen nur durch den Existenzbeweis gegebenen Grenzwert konvergiert - was eben aufwendiger ist.
Bei den Integralen hat man eine ähnliche Situation:
(i) Entweder man kennt eine Stammfunktion F des Integranden f. Dann kann man allein mit dem Monotoniesatz den Unterschied zwischen einer Riemann Summe für f auf dem Intervall $[a, b]$ und der Differenz $F(b) - F(a)$ abschätzen. (Details weiter unten)
(ii) Oder man kennt keine Stammfunktion von f - vielleicht gibt es ja gar keine! Dann muss man zuerst mit der Vollständigkeit ein Existenzproblem lösen. Das wird mit Obersummen und Untersummen gemacht. Alle Obersummen sind größer ($\geq$) als alle Untersummen und die Vollständigkeit liefert, dass mindestens eine reelle Zahl dazwischen liegt. Danach muss man über f so viel wissen, dass man zu jeder Fehlerschranke ϵ eine Obersumme und eine Untersumme finden kann, die sich höchstens um ϵ unterscheiden. Schließlich kann man das so definierte Integral als Funktion der oberen Grenze betrachten und muss - unter zusätzlichen Voraussetzungen (!) - zeigen, dass diese Funktion die Ableitung f hat.
Wegen der Schwierigkeiten, die an viel harmloseren Stellen auftreten, gebe ich keine Einzelheiten zu (ii). Wer das auf der Schule behandeln will, wird wissen, was zu tun ist.

Nun zu (i). Das Verständnis der Differentialrechnung misst sich daran, wie gut man den Unterschied der beiden Seiten (von $\approx$) in der folgenden grundlegenden Formel versteht:

$$\xi \in [x, y] \Rightarrow f(y) - f(x) \approx f'(\xi) \cdot (y - x)$$

Hierin ist f Stammfunktion von f'. Wir kommen daher direkt zu Riemann Summen. Zuerst passen wir die Bezeichnungen an unser Ziel an, wir schreiben für die Stammfunktion jetzt F (statt eben f) und für die Ableitung $F' = f$. Weiter sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Einteilung des Intervalls $[a, b]$ und dazu $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ gewählt . Dann sagt die eben zitierte Grundformel für jedes i

$$\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i] \ \Rightarrow \ \boxed{F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

und Summation über i (links steht eine Teleskopsumme) ergibt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Nun müssen wir nur noch “ungefähr gleich” ($\approx$) genauer ansehen.
Wenn f nur stetig ist, muss man sich anstrengen. Wenn f differenzierbar ist mit einer Schranke $|F''| = |f'| \leq L$, dann wird aus der Grundformel

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

mit Hilfe des Monotoniesatzes genauer:

$$\big|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\big| \leq \frac{1}{2} L \cdot (x_i - x_{i-1})^2$$

und daher durch Summation (mit Teleskopsumme $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$) wie gewünscht

$$\boxed{\big|F(b) - F(a) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\big| \ \leq \ \frac{1}{2} L \cdot (b - a) \cdot \max_i (x_i - x_{i-1}).}$$

Also, je feiner die Einteilung, um so besser stimmen die Riemann Summen mit der Differenz $F(b) - F(a)$ überein! Anders ausgedrückt: Wenn man eine Stammfunktion kennt, dann kann sie (bis auf eine additive Konstante) als Grenzwert von Riemann Summen rekonstruiert werden. Daher darf man erwarten, dass die Riemann Summen das auch dann leisten, wenn man die (nach (ii) für stetige f existierende) Stammfunktion nicht kennt. Aber ich wiederhole noch einmal: Wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird, dann gibt es die Stammfunktionen zwar, aber man kennt sie meistens nicht. Sollte F mit $F' = f$ ausnahmsweise gegeben sein, so kann man via *gleichmäßige Stetigkeit* die eben verfolgte Argumentationslinie anpassen. Wenn keine Stammfunktion vorliegt oder existiert, dann ist mir keine Vereinfachung der an der Universität vorgeführten Konstruktion der Integrale bekannt. (Der oben beschriebene Fall (ii) ist eine Kurzfassung.)