

# Geometrie für Lehramt

## Stichworte, Aufgaben, Argumente zur Vorlesung im WS 01/02.

### Inhalt

Die Vorlesung hatte das Ziel, Lehramtsstudenten Geometriekenntnisse nahe zu bringen, die zwischen Schulstoff und elementarer Differentialgeometrie liegen. Behandelt wurden:

Kreise (Sehnenwinkelsatz, ähnliche Dreiecke am Kreis)

Kegelschnitte (Geometrische Definition, Leitkreiskonstruktion, Lösungsmenge quadratischer Gleichungen, die Kugeln von Dandelin)

Perspektive (Fluchtpunkte, Fluchtgeraden, Pflasterungen, äquidistante Teilung, Rekonstruktion der Abbildungsdaten aus einem Bild, Satz von Desargues)

Platonische Körper (Euklidische Konstruktion, vom Würfel ausgehend, goldener Schnitt)

Sphärische Geometrie (Grundformeln der Dreiecksgeometrie mit Euklidischen Grenzfällen, Behandlung Platonischer Körper mit sphärischen Dreiecken, Fläche von Dreiecken)

Stereographische Projektion  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (Abbildungsformeln, Kreis- und Winkeltreue geometrisch und rechnerisch, Netze Platonischer Körper)

Dreidimensionale Sphärische Geometrie (Bilder mit stereographischer Projektion  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 2-Sphären- Kreis- und Winkel-Treue dieser stereographischen Bilder oder Karten, sphärische Platonische Körper wie im Euklidischen Fall mit rechtwinkligen Dreiecken behandelt, Platonische Pflasterungen von  $\mathbb{S}^3$ )

Quaternionen (Vierdimensionale 'Zahlen', die wie die komplexen Zahlen gut zur Geometrie passen, etwa  $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$ , bequeme Beschreibung der Drehungen des  $\mathbb{R}^3 = \text{Im } \mathbb{H}$  durch  $x \mapsto q \cdot x \cdot q^{-1}$ )

Bogenlänge (Geometrische Definition, Vergleich konvexer Kurven, Berechnung durch das Bogenlängenintegral)

Kurven mit Eigenschaften der ersten Ableitung (Rollkurven, Fadenevolvente, Schleppkurven, Zykloide ausführlich)

Flächeninhalte (Beispiele zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten durch Integration der Determinante der Jacobimatrix, insbesondere vom Fahrstrahl überstrichene Flächen und die Keplerschen Gesetze, Fläche sphärischer Dreiecke, Volumen von  $\mathbb{S}^3$ )

Kurven und ihre Krümmung (Ausführliche Diskussion der Definition, Beispiele, insbesondere Krümmung der Evolventen, Bestimmung einer ebenen Kurve durch ihre Krümmungsfunktion)

Sphärische Kurven (Übertragung Euklidischer Konstruktionen auf die Sphäre: Dreiecksätze, sphärische Ellipsen mit Leitkreiskonstruktion, Evolventen, Krümmung sphärischer Kurven, ausführlich)

Raumkurven (Krümmung jetzt ohne Vorzeichen, Rotation der Schmiegebene, Frenet Gleichung, kurz)

Hyperbolische Geometrie (Analog zur sphärischen Geometrie: Transitive Isometriegruppe, kürzeste Verbindungen sind ebene Schnitte durch den Mittelpunkt des Hyperboloids, Dreiecksformeln)

## 16.10.01

Umfangswinkelsatz, a) mit Hilfe gleichschenkliger Dreiecke, b) mittels der Spiegelungen an den Mittelsenkrechten der Winkelschenkel. Anwendung auf Produkte von Sehnenabschnitten am Kreis. Zwei Ähnlichkeitsbeweise zum Pythagoras.

Ellipsen als affine Bilder von Kreisen, als ebene Schnitte von Kreiszyklindern. Gärtnerkonstruktion: Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist gleich der Länge des großen Durchmessers der Ellipse.

Gelenkvierecke und Sehnenvierecke (Seitenlängen  $a_1, a_2, b_2, b_1$  und Winkeln  $\alpha$  zwischen  $a_1, a_2$  und  $\beta$  zwischen  $b_2, b_1$ ). Flächeninhalt  $F = \frac{1}{2}(a_1 a_2 \sin \alpha + b_1 b_2 \sin \beta)$  und Beziehung zwischen  $\alpha, \beta$ :  $\text{Diagonale}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha = b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos \beta$ , so daß  $\beta$  eine wachsende Funktion von  $\alpha$  ist. Sehnenvierecke:  $\alpha + \beta = \pi$ .

WS 01/02, 16.10.2001

Blatt 1

H. Karcher, T. Ebel

### Aufgabe 1.1 (Umfangswinkelsatz)

- In der Vorlesung wurde der Umfangswinkelsatz bewiesen, falls der Kreismittelpunkt innerhalb des Winkelsektors liegt. Schreiben Sie den anderen Fall auf.
- In jedem Sehnenviereck eines Kreises ist die Winkelsumme von zwei gegenüberliegenden Winkeln halb so groß wie die Winkelsumme des Vierecks.  
(In dieser Formulierung gilt der Satz auch in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie, ohne daß die Winkelsumme  $2\pi$  ist.)

### Aufgabe 1.2 (Sehnepolygone)

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Gelenkvierecke dann maximalen Flächeninhalt haben, wenn sie Sehnenvierecke eines Kreises sind. Mit der folgenden Behauptung läßt sich diese "isoperimetrische" Aussage auf konvexe Gelenkpolygone ausdehnen.

- Gegeben seien  $n > 3$  Punkte in der Ebene und vorausgesetzt werde, daß je vier dieser Punkte auf einem Kreis liegen. Zeigen Sie, daß dann alle Punkte auf demselben Kreis liegen.
- Gibt es eine ähnliche Behauptung mit Geraden statt Kreisen?

### Aufgabe 1.3 (Hyperbeln)

- Gegeben sei die Hyperbel  $H := \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ . Zeigen Sie, daß es zwei Punkte  $(\pm e, 0)$  gibt, so daß für alle Hyperbelpunkte die Differenz der Abstände zu diesen beiden Punkten gleich  $2a$  ist. (Wie drückt sich diese Behauptung, mit dem Satz des Pythagoras, durch eine Formel aus? Kennen Sie die Funktionen  $\sinh, \cosh$ ?)

### Aufgabe 1.4 (Hauptachsen)

Gegeben sei die quadratische Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := 4x^2 + 20xy + 6y^2$ . Verwende das Skalarprodukt, für das  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Orthonormalbasis ist.

- Finde eine symmetrische Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  so daß gilt  $f(x, y) = \langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$ .



## 23.10.01

Beschränkte Kegelschnitte *sind* Ellipsen, ausführlicher Beweis mit Dandelins Kugeln, Rückseite Aufgabenblatt 2. Beschreibung von Kegeln als Niveaus quadratischer Funktionen. Andere quadratische Funktionen. Ebene Schnitte von quadratischen Flächen werden durch quadratische Gleichungen in zwei Variablen beschrieben. Liste der einfachen Beispiele. Koordinatenwechsel mit Drehungen bringen die Matrix des quadratischen Teils auf Diagonalgestalt. (Beachte: Rang  $< 2$  liefert proportionale Vektoren. Daraus folgt das charakteristische Polynom sogar ohne Kenntnis von Determinanten.) Klassifikation: Quadratische Gleichungen beschreiben *Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, Geradenpaare (schneidend oder parallel, inklusive Doppelgerade) und als Entartungen einzelne Punkte ( $x^2 + y^2 = 0$ ) oder ohne Punkte ( $x^2 + y^2 = -1$ )*.

WS 01/02, 23.10.2001

Blatt 2

H. Karcher, T. Ebel

# Geometrie für Lehramt

## Aufgabe 2.1 (Umfangswinkelsatz und Streckenprodukte)

Wir hatten gezeigt: Falls zwei Kreissehnen sich im Innern schneiden, so ist das Produkt der Längen der Teilstrecken einer Sehne gleich dem entsprechenden Produkt der anderen. Zeigen Sie die entsprechende Aussage, falls die verlängerten Sehnen sich außerhalb des Kreises schneiden.

(Erinnerung: Die Umfangswinkel zu komplementären Kreisbögen ergänzen sich zu  $\pi$ .)

## Aufgabe 2.2 (Zur Ellipsendefinition)

Wir hatten bewiesen, daß die affinen Bilder von Kreisen die Gärtneereigenschaft haben. Jetzt ist die umgekehrte Richtung zu zeigen. Es sei also  $0 < e < a$  gegeben und  $E$  sei die Menge der Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände von den beiden "Brennpunkten"  $(-e; 0), (e; 0)$  gleich  $2a$  ist. Leiten Sie eine quadratische Gleichung für die Koordinaten der Punkte von  $E$  her.

## Aufgabe 2.3 (Schrägspiegelungen bei Hyperbeln)

Betrachte den Graphen von  $f(x) := 1/x$ , also die Hyperbel  $\{(x; y); x \cdot y = 1\}$ . Bestimme den Schnittpunkt  $p = (x_1; y_1)$  der Geraden  $y = m \cdot x$  mit diesem Graphen und die Richtung  $v = (v_1; w_1)$  der Tangente des Graphen in  $p$ . Bestimme die Matrix bezüglich der Standardbasis für die lineare Abbildung  $L$ , die definiert ist durch

$$L(p) = +1 \cdot p, \quad L(v) = -1 \cdot v,$$

die also  $p$  und  $v$  als Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\pm 1$  hat.

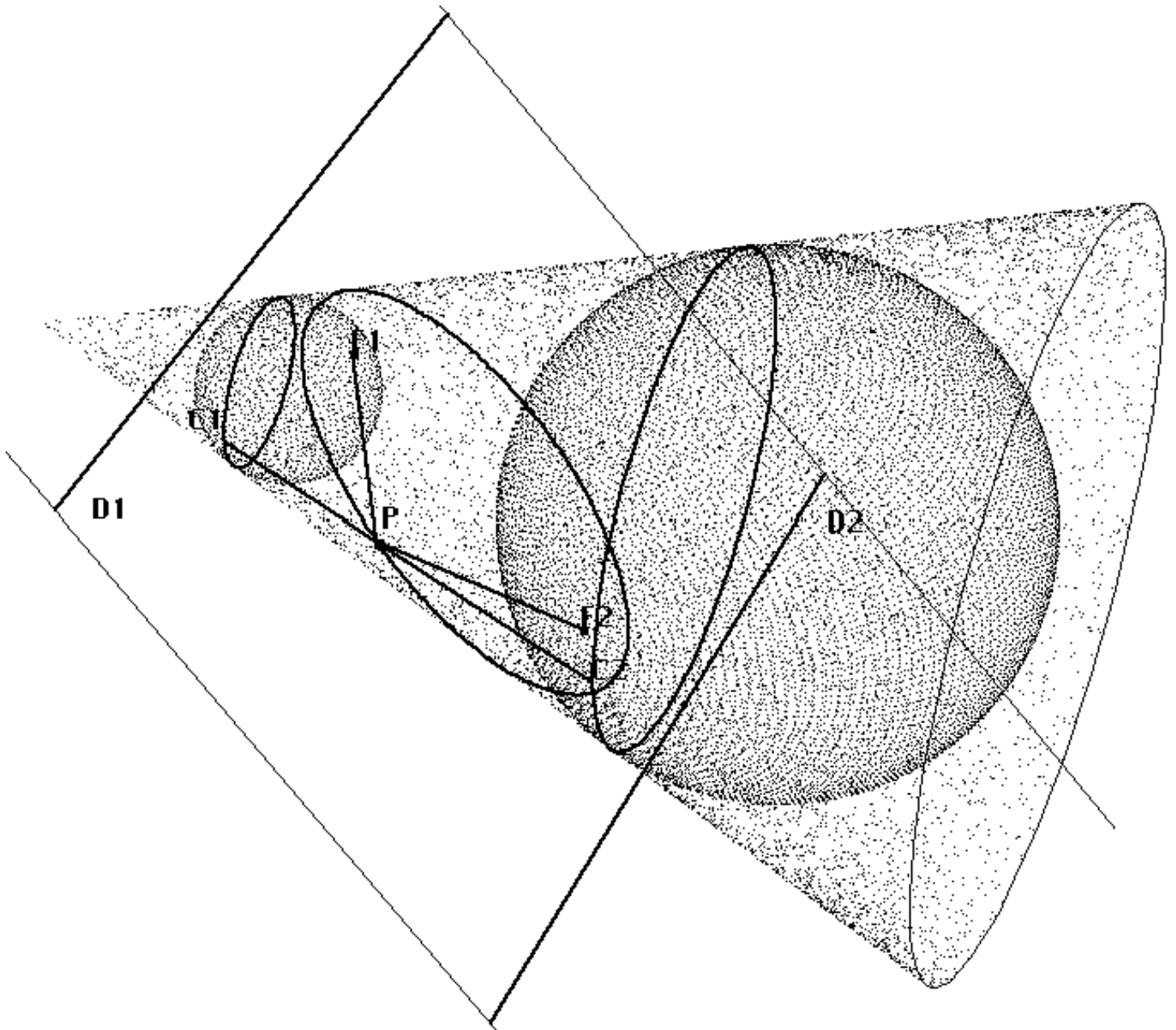
Kontrolliere, daß  $L$  die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse vertauscht und daß  $L$  die Hyperbel auf sich abbildet.

## Aufgabe 2.4 (Kegelschnitte)

- Gib die Matrizen (bezgl. der Standardbasis) der Drehungen um die  $y$ -Achse um die Winkel  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  an, die die positive  $z$ -Achse in den Quadranten zwischen positiver  $x$ - und  $z$ -Achse drehen (also Vorzeichen beachten).
- Gib die vier Spiegelungsmatrizen an, für die die  $z$ -Achse dasselbe Bild wie bei den Drehungen aus a) hat. (Auf keinen Fall viel rechnen.)

Der Rotationskegel  $K := \{(x; y; z); x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  schneidet die Ebene  $z = 1$  in einem Einheitskreis.

- c) Drehe diesen Kegel mit den vier Drehungen aus a) und schneide die gedrehten Kegel mit der Ebene  $z = 1$ . Die Schnittkurven sollen durch eine quadratische Gleichung angegeben werden.



Die Kugeln von Dandelin zur Erklärung der Kegelschnitteigenschaften  
 Die Ellipsenebene berührt die beiden Kugeln in den Fokalfpunkten  $F1, F2$ . Die beiden Tangenten vom Ellipsenpunkt  $P$  an die Kugel 1, also die Strecken  $\overline{PF1}$  und  $\overline{PC1}$ , sind gleich lang. Dasselbe gilt für die Kugel 2. Daher ist die Summe der Abstände von  $P$  nach  $F1$  und nach  $F2$  gleich dem Abstand  $C1C2$ , also gleich dem Abstand der beiden Kreise, in denen die beiden Kugeln den Kegel berühren.

### 25.10.01

Skalarprodukte, Ellipsen als Einheitskreise. Schrägspiegelungen von Ellipsen, Eigenwerte  $\pm 1$ , konjugierte Richtungen (Durchmesser und Tangenten in den Endpunkten).

Anfänge perspektiver Konstruktionen, Definition einer Zentralprojektion von einem Zentrum  $Z$  in eine Ebene  $\epsilon$ , ( $Z \notin \epsilon$ ):  $P \mapsto (Z \vee P) \cap \epsilon$ . Punkte in  $\epsilon$  stimmen mit ihren Bildern überein, Bilder von Geraden sind Geraden (im Allgemeinen gilt:  $g \mapsto (Z \vee g) \cap \epsilon$ ). Parallelverschiebung von Geraden  $g$  oder Ebenen  $E$  durch das Projektionszentrum  $Z$  wird so oft wichtig sein, daß wir eine Bezeichnung für die verschobenen Geraden und Ebenen verabreden:  $g^{\parallel Z}, E^{\parallel Z}$ . Bilder paralleler Geraden schneiden sich in einem **Fluchtpunkt**, bis auf Ausnahmen gilt: Fluchtpunkt  $:= F(g) := g^{\parallel Z} \cap \epsilon$ . Jedes Viereck kann als Bild eines Quadrates angesehen werden, Fortsetzung zu einem Bild einer Pflasterung mit Quadraten.

### 30.10.01

Beachten Sie: Bei der physikalischen Realisierung einer Zentralprojektion mit einer Lochkamera befindet sich das Zentrum  $Z$  zwischen Objekt und Bild. Dagegen sind Freihandzeichnungen wesentlich einfacher, wenn das Objekt zwischen Zentrum und Bildebene vorgestellt wird. Die mathematische Definition erlaubt, **alle** Punkte außerhalb von  $\epsilon^{\parallel Z}$  nach  $\epsilon$  zu projizieren.

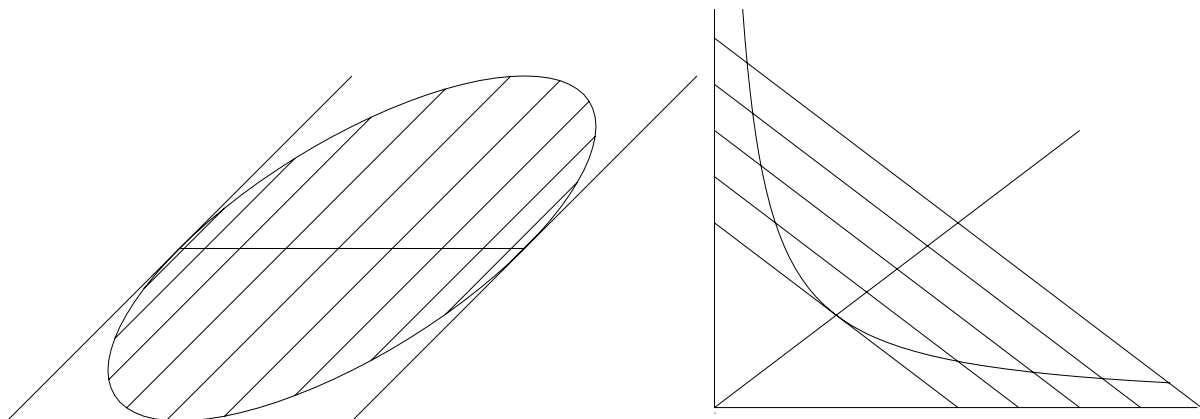
**Satz:** Die Fluchtpunkte **aller** Geraden einer Ebene  $E$  liegen wieder auf einer Geraden, der Fluchtgeraden  $F(E) := E^{\parallel Z} \cap \epsilon$  der Ebene  $E$ .

Unerwartete Schwierigkeiten machte folgende Beobachtung: Zeichnet man in das Bild einer Ebene  $E$  eine Gerade  $\eta$ , die **parallel** zur Fluchtgeraden  $F(E)$  ist, so gibt es eine (zu  $\eta$  parallele) Gerade  $h \subset E$ , die auf  $\eta$  projiziert wird,  $\eta = (Z \vee h) \cap \epsilon$ ,  $h = (Z \vee \eta) \cap E$ . Dies ist wichtig, weil eine äquidistante Skala auf  $h$  als Bild eine äquidistante Skala auf  $\eta$  hat.

Rechnerische Perspektive. Vorbemerkung. (i) Die Niveaus linearer Funktionen  $\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell(X) := a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3$ ,  $E_w = \{X \in \mathbb{R}^3; \ell(X) = w\}$  bilden eine Schar paralleler Ebenen.

(ii) Die Gerade durch  $P \neq Q \in \mathbb{R}^3$  kann geschrieben werden als  $\{Q + t \cdot (P - Q); t \in \mathbb{R}\}$ .

Projektion: Den Schnittpunkt dieser Geraden mit  $E_w$  erhält man, falls gilt  $\ell(Q + t \cdot (P - Q)) = w$ , also  $t := (w - \ell(Q)) / \ell(P - Q)$ . Außer falls  $P - Q$  im Kern von  $\ell$  liegt, kann man also  $P$  von  $Q$  nach  $E_w$  projizieren.



Schrägspiegelungen bei Ellipsen und Hyperbeln, Eigenwerte  $+1$  und  $-1$ .

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 3.1 (Andere quadratische Kegel)

- a) Geben Sie die Gleichung eines quadratischen Kegels an, dessen Schnitte mit den Ebenen  $z = \text{const} \neq 0$  Parabeln sind. Besitzt der von Ihnen angegebene Kegel Ellipsen oder Hyperbeln als ebene Schnitte? Mit welchen Ebenen?
- b) Geben Sie die Gleichung eines quadratischen Kegels an, dessen Schnitte mit den Ebenen  $z = \text{const} \neq 0$  Hyperbeln sind, deren Asymptoten die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse (in den Ebenen  $z = \text{const}$ ) sind. Können Sie Ebenen angeben, die in Parabeln oder in Ellipsen schneiden?

### Aufgabe 3.2 (Leitgerade einer Ellipse)

In der Vorlesung wurde nachgerechnet, daß die Punkte einer Parabel gleichen Abstand von einem (Brenn-)Punkt und einer (Leit-)Geraden haben.

Rechnen Sie nach, daß für die Punkte einer Ellipse gilt, daß das **Verhältnis** der Abstände von einem Brennpunkt und von einer (erst durch Betrachten spezieller Punkte zu ratenden) Geraden eine Konstante  $< 1$  ist.

Sie dürfen stattdessen auch die Umkehrung beweisen, also daß eine Kurve, für die das beschriebene Abstandsverhältnis konstant ( $< 1$ ) ist, eine Ellipsengleichung erfüllt.

### Aufgabe 3.3 (Perspektive Pflasterungen einer Ebene)

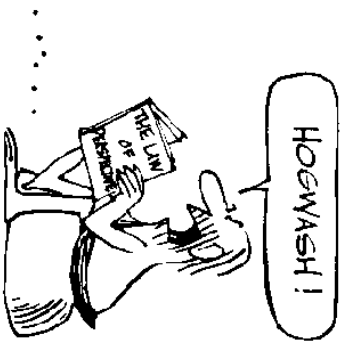
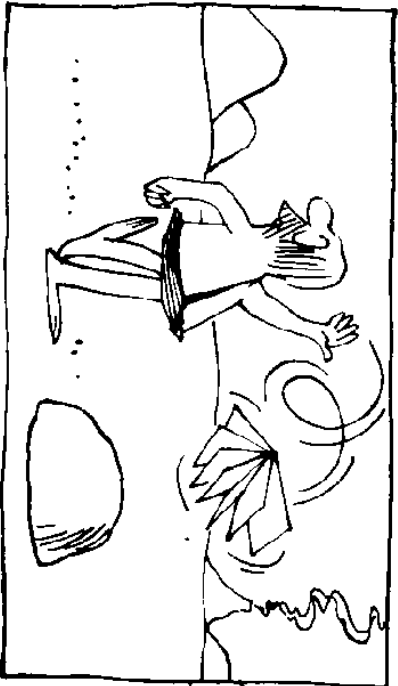
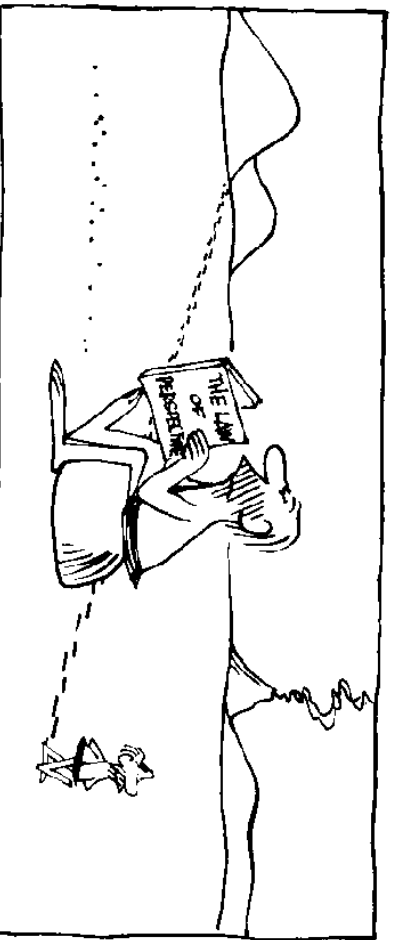
Benutzen Sie ein Lineal für die folgenden Konstruktionen.

- a) Interpretieren Sie ein Viereck ohne parallele Seiten als perspektives Bild eines Quadrates. Nehmen Sie an, das Quadrat sei Teil einer Pflasterung, konstruieren Sie die Bilder von acht Nachbarn des ersten Quadrates.
- b) Begründen Sie die Konstruktion in a) mit einem verständlichen Text. Das Wort Fluchtgerade muß definiert werden.
- c) Unterteilen Sie das Bild einer Quadratseite in fünf gleiche Teile und begründen Sie die Konstruktion.

### Aufgabe 3.4 (Rechnerische Perspektive)

Gegeben seien die Kreise  $K_m := \{(x; y; 1); x^2 + (y - m)^2 = 1\}$  in der Ebene  $\{z = 1\}$ .

- a) Welche Gleichung hat der Kegel mit Spitze in  $Z = (0; 0; 0)$ , der den Kreis  $K_m$  enthält?
- b) Projiziere  $K_m$  von  $Z$  aus in die Ebene  $\{y = 1\}$ , d.h. gib die Gleichung der Bildkurve an.
- c) Entscheide, für welche  $m$  die Bilder entweder Ellipsen oder Parabeln oder Hyperbeln sind.



BY PERMISSION OF JOHN HART AND FIELD ENTERPRISES, INC.

*Hart*

Zur Perspektive



### 6.11.01

3D-Übungen: (i) Was für ebene Schnitte hat ein Würfel? (ii) Der Satz von Desargues, eine ebene Behauptung, die durch räumliche Interpretation bewiesen werden kann.

Einfache anschauliche Zeichnungen sind Parallelprojektionen; gebräuchlich ist eine Projektionsrichtung, die einen  $45^\circ$ -Winkel mit der Projektionsebene bildet. Mit einer solchen Parallelprojektion wurde ein anschauliches Bild einer Zentralprojektion entworfen, um noch einmal die Konstruktion von Fluchtpunkten, Fluchtgeraden und Durchstoßpunkten von Geraden durch die Bildebene zu zeigen. Zentralprojektionen von  $Z = (0; 0; 0)$  lassen sich mit sehr einfachen Formeln rechnen:

$$\begin{aligned}(x; y; h) &\rightarrow t \cdot (x; y; h) && \text{Gerade durch } Z \text{ und } (x; y; h), \\ &\rightarrow (D \cdot x/y; D; D \cdot h/y) && \text{Schnitt dieser Geraden mit der Ebene } y = D.\end{aligned}$$

Die hierdurch gegebene Abbildung der Ebene  $z = h$  in die Bildebene heißt eine projektive Abbildung,  $(x; y) \mapsto (D \cdot x/y; D \cdot h/y)$ . (Verifiziere die Geradentreue.)

Sowohl die Zeichnung wie die Rechnung zeigt, daß Geraden in einer Ebene  $E$ , die parallel zur Fluchtgeraden  $F(E)$  von  $E$  sind, zu sich selbst parallele Bilder haben. Daher haben äquidistante Skalen auf solchen Geraden als Bilder wieder äquidistante Skalen. Hiermit werden in perspektiven Bildern Strecken äquidistant unterteilt.

### 8.11.01

Letzte Vorlesung zur Perspektive.

- 1.) Die rechnerischen Formeln sind einfach.
- 2.) Die Herstellung von Bildern äquidistanter Teilungen wird noch einmal wiederholt.
- 3.) Wenn nur ein perspektives Bild gegeben ist, hat man noch nicht genug Daten zum Rechnen. Also, was muß man über ein perspektives Bild wissen, um die Daten der benutzten Zentralprojektion rekonstruieren zu können?
  - a) Zusatzvoraussetzung: Man sieht ein Viereck, das Bild eines ebenen Rechtecks ist. Dann ist die Verbindung der beiden Fluchtpunkte (der Seiten des Rechtecks) der Durchmesser einer "Thaleskugel", auf der das Projektionszentrum ( $Z$ ) liegen muß. Ist das Seitenverhältnis des Rechtecks (z.B. ein Quadrat) bekannt, so schränkt der Umfangswinkelsatz die Lage von  $Z$  weiter ein, auf einen Rotationskreis auf der Kugel. Diese Informationen genügen, um die Bilder beliebiger Winkel in der Rechtecksebene zu konstruieren.
  - b) Weitere Voraussetzung: Die Ebene des Rechtecks sei senkrecht zur Bildtafel. Dann liegt  $Z$  senkrecht über der Fluchtgerade, senkrecht über dem Fluchtpunkt  $H$  der Tiefenlinien (senkrecht zur Bildtafel). Der Abstand von der Bildtafel ergibt sich mit der Thaleskonstruktion aus a). Damit sind die Daten der Zentralprojektion bestimmt.
  - c) Schwächer als Voraussetzung b): Falls die Rechtecksebene nicht senkrecht zur Bildtafel ist, so besteht wenigstens eine Einschränkung für die Lage des Fluchtpunktes der Geraden senkrecht zur Rechtecksebene; sie müssen auf der Geraden liegen, die senkrecht zur Fluchtgerade (der Rechtecksebene) ist und durch den rechten Winkel des umgeklappten Thalesdreiecks (aus a) ) geht. Der Winkel zwischen Bildtafel und Rechtecksebene ist gegeben durch den Fluchtpunkt der Geraden senkrecht zum Rechteck. Damit kennt man die Fluchtgeraden von drei zu einander senkrechten Ebenen und der Hauptpunkt  $H$  ist der Schnittpunkt der Höhen im Dreieck aus diesen Fluchtgeraden. Damit sind wieder die Daten der Zentralprojektion bestimmt.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 4.1 (Homogene und Inhomogene Lineare Gleichungssysteme)

Bezeichnung: Für  $a \in \mathbb{R}^3$  heißt die Abbildung  $T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T_a(x) := a + x$  Translation um  $a$ . Zwei Geraden  $a + t \cdot v$ ,  $b + t \cdot w$  heißen parallel, wenn die Vektoren  $v, w$  proportional sind ( $\neq 0$  und linear abhängig). Translationen bilden Geraden auf parallele Geraden ab.

Gegeben seien zwei linear unabhängige lineare Abbildungen  $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Definieren Sie, was mit linear unabhängigen linearen Abbildungen gemeint ist, und geben Sie ein Beispiel linear unabhängiger und eines linear abhängiger solcher Abbildungen an.
- Zeigen Sie, daß die Ebenen  $E_j := \{x \in \mathbb{R}^3; \ell_j(x) = c_j\}$ ,  $j = 1, 2$  die Ebene  $F := \{x \in \mathbb{R}^3; \ell_2(x) = d\}$  in zwei parallelen Geraden schneiden. (Begründung mit Sätzen über lineare Gleichungssysteme.)

### Aufgabe 4.2 (Satz von Desargues und schwer erreichbare Punkte)

Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier zwei Geraden  $g_1, g_2$ , deren Schnittpunkt außerhalb des Blattes liegt. Wählen Sie einen Punkt  $P$ , der nicht auf diesen Geraden liegt. Benutzen Sie den Satz von Desargues, um durch  $P$  die Gerade zu zeichnen, die auch durch  $g_1 \cap g_2$  geht.

### Aufgabe 4.3 (Projektive Abbildung, (Hauptaufgabe dieser Serie 4) )

Der Kegel  $K := \{X = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  schneidet die Ebene  $\{z = 1\}$  im Einheitskreis. Die Gerade  $g$  sei die Verbindung der beiden Punkte  $(3/5; \pm 4/5; 1)$  auf diesem Kreis. Der Punkt  $P = (?; 0; 1)$  sei der Schnittpunkt der Kreistangenten in diesen beiden Punkten. Die Ebene durch  $Z := (0; 0; 0)$  und  $g$  wird aufgespannt von den Vektoren  $v_1 := (3/5; 0; 1)$  und  $v_2 := (0; 1; 0)$ .

- Definiere eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $L(v_j) := v_j$ ,  $j = 1, 2$  und  $L(P) := -P$ . Welche Matrix hat  $L$  bezüglich der Basis  $\{v_1, v_2, P\}$  und welche Matrix bezüglich der Standardbasis  $\{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$ ?
- Verifiziere, daß  $L(K) = K$  gilt.
- Definiere die zu  $L$  gehörige 'projektive Abbildung'  $\hat{L}$  der Ebene  $\{z = 1\}$  in sich dadurch, daß die Geraden  $\mathbb{R} \cdot L((x; y; 1))$  mit der Ebene  $\{z = 1\}$  geschnitten werden. Berechne die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Bildpunkte  $\hat{L}((x; y))$ .
- Verifiziere, daß  $\hat{L}$  die zu  $g$  parallelen Geraden auf zu  $g$  parallele Geraden abbildet (mit welcher Ausnahme?), daß  $g$  aus Fixpunkten besteht und daß jede Gerade durch  $P$  auf sich selbst abgebildet wird (auf fast jeder Geraden liegt ein Ausnahmepunkt, wo?).

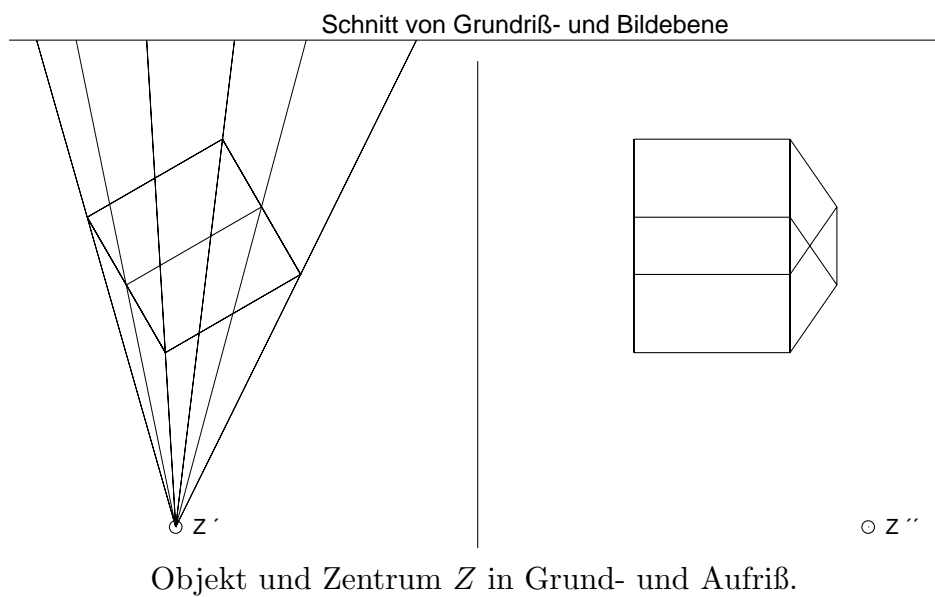
### Aufgabe 4.4 (Perspektive Zeichnung)

Auf der Rückseite ist in Grund- und Aufriß ein Objekt (Würfel mit Dach) und ein Zentrum  $Z$  gegeben. Als Grundrißebene wird die Papierebene angenommen; der Strich zwischen Grund- und Aufriß ist die Schnittgerade von Aufrißebene und Grundriß (= Papier). Die Aufrißzeichnung entsteht nach Umklappen der Aufrißebene (um die gezeichnete Schnittgerade nach rechts). Ebenso wird die Lage der Bildebene durch die gezeichnete Schnittgerade mit dem Grundriß festgelegt und zum Zeichnen nach oben geklappt.

Konstruieren Sie das perspektive Bild.

Hinweise: Im Grundriß kann (i) das Bild jedes Punktes mit einer einzigen Hilfslinie gefunden

werden und (ii) der Durchstoßpunkt jeder Geraden durch die Bildebene abgelesen werden. Der Aufriß zeigt, in welcher Höhe die Bodenebene des Würfels die Bildebene trifft, und wie hoch über dem Grundriß deren Fluchtgerade liegt. Zur Kontrolle konstruieren Sie die Bilder der 10 Ecken des Objektes als Schnitt von jeweils drei (nicht zwei) Geraden!



### 13.11.01

Wiederholungsfrage: Warum sind perspektive Bilder von Kegelschnitten wieder Kegelschnitte?

Die einfachen Platonischen Körper und ihre Beziehung zum Würfel, vgl. Aufgabe 5.2a.

Konstruktion des Ikosaeders, ausgehend von 6 Kanten auf den Flächen eines Würfels, Rückseite Blatt 5. Kommentare zum goldenen Schnitt, da das Verhältnis der Kantenlängen von Ikosaeder und Würfel gleich  $(-1 + \sqrt{5})/2$  ist. Weil die Ecken alle auf einer Kugel liegen, sind alle Diederwinkel des Körpers auf Blatt 5 gleich.

Die Diskussion aller Symmetrien wird übersichtlicher, wenn man den Ikosaeder vom Mittelpunkt auf die Umkugel projiziert und sphärische Trigonometrie benutzt. Mit deren Herleitung wurde begonnen.

### 15.11.01

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie werden hergeleitet. Ein Dreieck mit den Ecken  $A, B, C$ , den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  an diesen Ecken und den den Ecken gegenüber liegenden Seiten  $a, b, c$  wird so gedreht, daß gilt:

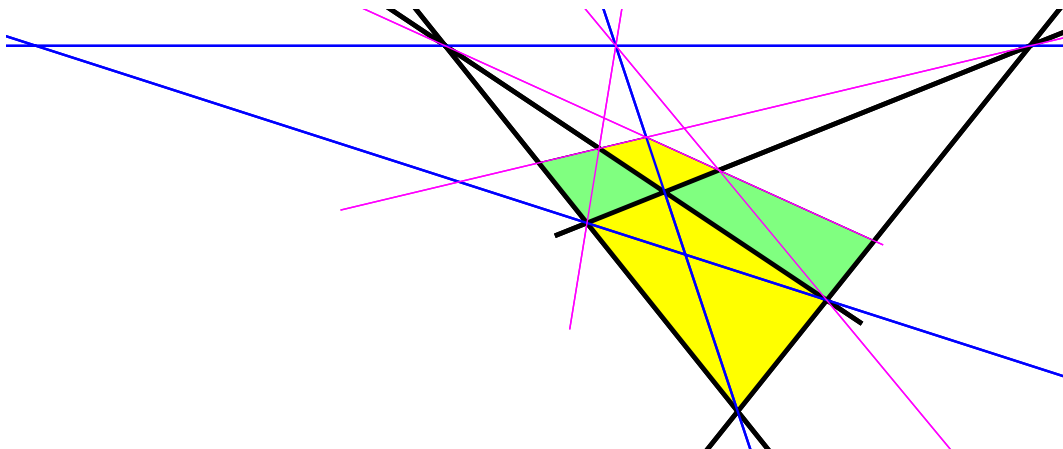
$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sin c \\ 0 \\ \cos c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \sin b \cos \alpha \\ \sin b \sin \alpha \\ \cos b \end{pmatrix}. \quad Sp := \begin{pmatrix} -\cos c & 0 & \sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist  $Sp$  die Spiegelung, die  $A, B$  vertauscht (und die  $y$ -Achse fest läßt). Sie bildet  $C$  nach  $Sp(C) = (\sin a \cos \beta; \sin a \sin \beta; \cos a)$  ab nach Definition von  $a, \beta$ . Andererseits kann man  $Sp \cdot C$  ausmultiplizieren und zeilenweise vergleichen: Die erste Zeile liefert den Projektionssatz, die zweite den Sinussatz, die dritte den Kosinussatz.

Bei kleinen Seitenlängen haben die Formeln als Grenzfall die entsprechenden der euklidischen Ebene, z.B. bei  $a, b, c \leq 0.1$  bis auf Fehler  $\leq 1\%$ .

Das Polardreieck wird erläutert, vgl. Rückseite Blatt 6. Es liefert als letzte Formel den Winkelkosinussatz:  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$ .

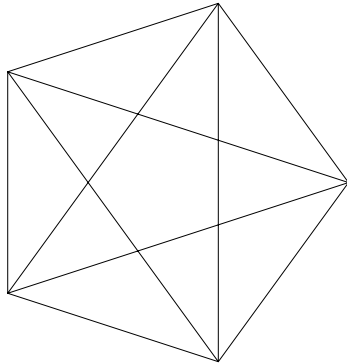
Die stereographische Projektion der Einheitssphäre von  $S = (0; 0; -1)$  in die gegenüberliegende Tangentialebene  $\{z = 1\}$ ,  $(x; y; z) \mapsto (2x/(1+z); 2y/(1+z); 1)$ , wird eingeführt. Ihre Kreistreue wird geometrisch bewiesen.



Perspektive Pflasterung. Das dick gezeichnete Viereck sei als Bild eines Quadrates gegeben.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 5.1 (Drudenfuß)



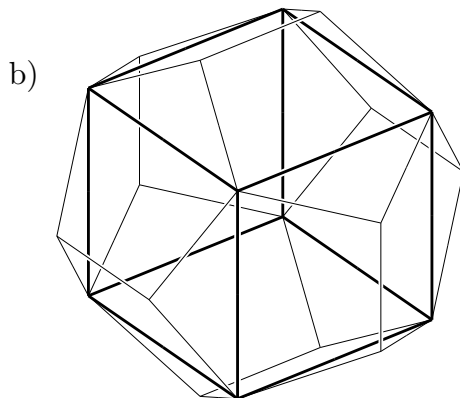
In dem abgebildeten Fünfeck mit Diagonalen findet man viele ähnliche gleichschenklige Dreiecke. Leiten Sie daraus her, daß der goldene Schnitt als Streckenverhältnis mehrfach vorkommt. Da man  $\sqrt{5}$  mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (wie nämlich?), folgt daraus, daß man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal zeichnen kann, wie nämlich?

Enthält die Figur einen Irrationalitätsbeweis für  $\sqrt{5}$ ?

### Aufgabe 5.2 (Platonische Körper)

- a) Wiederholen Sie, wie Tetraeder und Oktaeder in einen Würfel gezeichnet werden können. Betrachten Sie den Schwerpunkt dieser Körper als Nullpunkt von  $\mathbb{R}^3$ . Sie kennen die Koordinaten der Eckpunkte, berechnen Sie mit Hilfe von Skalarprodukten die Winkel der Ortsvektoren...

(i) zu benachbarten Ecken, (ii) zu den Mittelpunkten benachbarter Kanten, (iii) zu benachbarten Flächenmitten.



Führen Sie die Bestimmung der Ecken eines (einem Würfel umbeschriebenen) Dodekaeders vor.

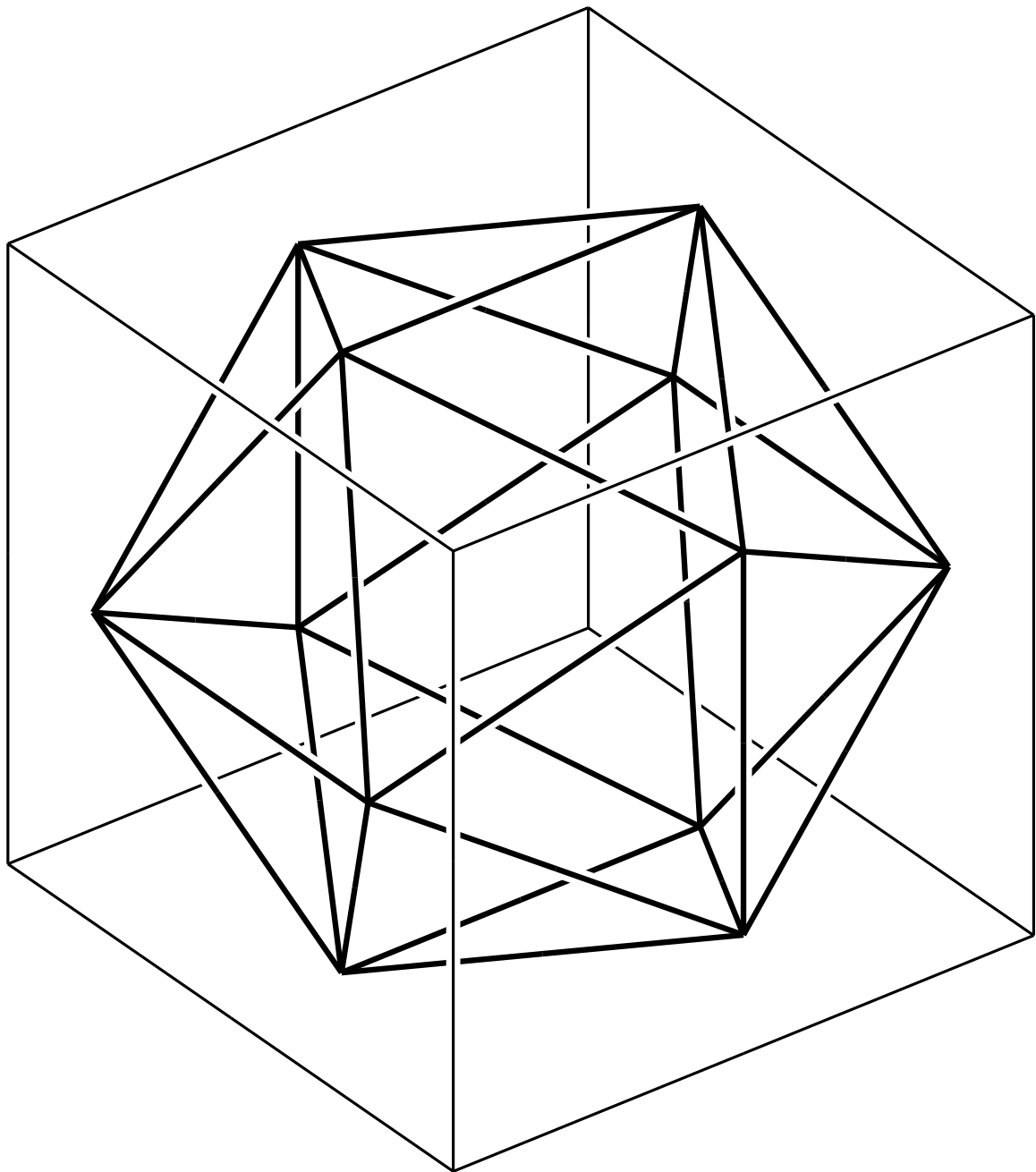
Bestimmen Sie wie in a) die Winkel zwischen den Ortsvektoren (i) zu benachbarten Ecken, (ii) zu den Mittelpunkten benachbarter Kanten, (iii) zu benachbarten Flächenmitten.

### Aufgabe 5.3 (Grundformeln der sphärischen Trigonometrie)

- a) Beweisen Sie (mit erläuterndem Text) die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, der Vorlesung folgend.
- b) Welche euklidischen Grenzfälle haben diese Formeln? (mit kleiner Zeichnung)

### Aufgabe 5.4 (Beispiel zur sphärischen Trigonometrie)

- a) Berechnen Sie zu einem sphärischen Dreieck mit den Seitenlängen  $\pi/1.9, \pi/2.9, \pi/3.8$  die drei Winkel, den Abstand des Inkreismittelpunktes von den drei Ecken und den Radius des Inkreises.
- b) Beschreiben Sie mit einem Text, wie Sie den Umkreisradius bestimmen könnten.



Auf einer Mittellinie jeder Würfelfläche liegt eine Ikosaederkante.  
 Zur Ikosaederkonstruktion muß die Länge dieser Kanten bestimmt werden. Die Seitenlänge des Würfels sei  $2$ , die gesuchte Kantenlänge sei  $2a$ . Die übrigen 24 Kanten sind Kanten der konvexen Hülle der ersten 6 Kanten; sie beranden 8 gleichseitige Dreiecke, auf denen jeweils eine Raumdiagonale des Würfels senkrecht steht. Mit Pythagoras findet man für die Länge  $\ell$  jeder dieser 24 Kanten  $\ell^2 = (1 - a)^2 + 1^2 + a^2 = 2(1 - a + a^2)$ . Aus der Bedingung  $\ell = 2a$  folgt also  $a^2 + a = 1$  oder  $a = (-1 + \sqrt{5})/2$  (goldener Schnitt). Folgt hieraus, daß die Diederwinkel aller Kanten gleich sind oder ist noch etwas zu prüfen?

### 20.11.01

Stereographische Projektion: Kreistreue impliziert Winkelstreue, weil es zu jeder Kugeltangente einen Kreis auf der Kugel mit dieser Tangente gibt, der durch den Nordpol geht. Im Nordpol ist die stereographische Projektion winkeltreu, und zwei Kreise schneiden sich in der Ebene und auf der Kugel in beiden Punkten unter gleichen Winkeln.

Wiederholung der Kreistreue mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes und des Höhensatzes.

Rechnerischer Beweis: Angenommen, die Bildpunkte  $(\xi = 2x/(1+z), \eta = 2y/(1+z))$  bilden den Kreis  $(\xi - m)^2 + \eta^2 - r^2 = 0$ , dann liegen die Urbildpunkte (natürlich auf der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  und) auf der Ebene  $ax + cz + d = 0$ . Wir haben bestimmt, daß  $a = -4m, c = m^2 - r^2 - 4, d = m^2 - r^2 + 4$  die richtigen Koeffizienten der Gleichung sind. (Mit 6.3a führt eine etwas einfachere Rechnung zum selben Ziel.)

### 22.11.01

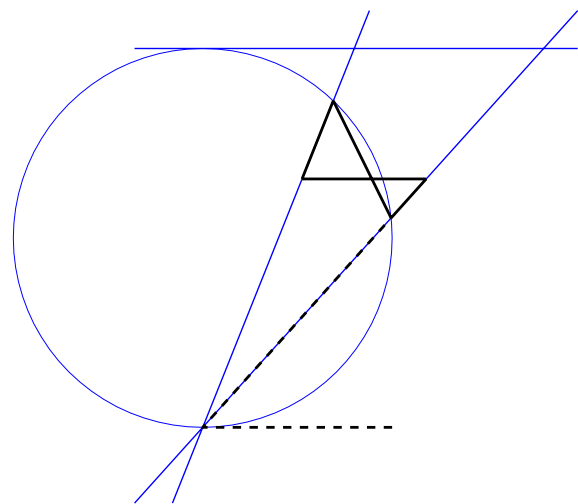
Wie dreht man Geraden und Ebenen um die  $z$ -Achse – mühsamer als ich erwartet hatte. Sei  $D$  eine Drehung und  $t \mapsto p + t \cdot v$  eine parametrisierte Gerade, dann ist  $t \mapsto D(p) + t \cdot D(v)$  die Bildgerade. Sei  $\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Funktion; eine Ebene sei als Niveau  $\ell = w$  gegeben:  $\{x \in \mathbb{R}^3; \ell(x) = w\}$ . Dann erfüllen die Bildpunkte  $\tilde{x} := D(x)$  offenbar die lineare Gleichung  $\ell \circ D^{-1}(\tilde{x}) = w$ .

Welche Ebenen kommen bei der Rechnung vom letzten mal *nicht* als Urbilder von Kreisen vor? Ersten die Ebenen durch  $(0; 0; -1)$ , d.h.  $d - c = 0$ , denn sie schneiden Kreise aus (Ausnahme: Tangentialebene), die auf Geraden abgebildet werden; zweitens Ebenen, die die Kugel gar nicht schneiden, weil ihr Abstand von  $(0; 0; 0)$  zu groß ist ( $ax + by + cz = d \Rightarrow d^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 + b^2 + c^2$ .)

Volumen der Kugel nach Archimedes: Die Halbkugel hat Querschnitte derselben Fläche  $\pi(R^2 - h^2)$  wie der Differenzkörper aus einem Zylinder und einem Kegel (Spitze nach unten). Daher  $Vol(Kugel) = (4\pi/3)R^3$

Flächeninhalte nicht-ebener Flächen werden mit Hilfe des Volumens dünner Schichten (der Dicke  $d$  und  $\lim_{d \rightarrow 0} Vol/d$ ) definiert. Für Sphären liefert das  $Fläche(Sphäre) = 4\pi R^2$ .

Der Flächeninhalt sphärischer Dreiecke,  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ , wurde wie auf der Rückseite von Blatt 6 hergeleitet.



Die Kugel und der Projektionskegel schneiden sich nach Konstruktion in dem einen Thaleskreis. Der Horizontalschnitt ist der andere Thaleskreis.

#### Stereographische Projektion.

Beweis der Kreistreue mit dem Umfangswinkelsatz: Die beiden fett gezeichneten Dreiecke sind ähnlich, denn sie haben einen Scheitelwinkel gemeinsam und die jeweils oberen Winkel stimmen mit dem Winkel zwischen der gestrichelten Sehne und der Tangente im Südpol überein, im einen Fall als Wechselwinkel an Parallelen, im anderen Fall wegen des Umfangswinkelsatzes. Also stimmen die Teilstreckenprodukte der beiden sich schneidenden Strecken überein. Die senkrecht auf diesen Strecken stehenden Thaleskreise haben nun (wegen des Höhensatzes) über dem Schnittpunkt die gleiche Höhe.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 6.1 (Rechtwinklige sphärische Dreiecke)

Die Formeln für sphärische Dreiecke vereinfachen sich im rechtwinkligen Fall ( $\gamma = \pi/2$ ) so weit, daß zu zwei beliebig gegebenen Dreiecksstücken jedes andere aus einer expliziten Formel berechnet werden kann. Leiten Sie die folgende Liste von Formeln entweder durch unmittelbare Spezialisierungen der Formeln aus 5.3 oder durch kurze Rechnungen mit diesen Formeln her ( $\gamma = \pi/2$ !).

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &\stackrel{(1)}{=} \cos c \stackrel{(4)}{=} \cot \alpha \cot \beta \\ \cos a \sin \beta &\stackrel{(2)}{=} \cos \alpha \stackrel{(5)}{=} \tan b \cot c \\ \sin c \sin \alpha &\stackrel{(3)}{=} \sin a \stackrel{(6)}{=} \tan b \cot \beta.\end{aligned}$$

### Aufgabe 6.2 (Reguläre sphärische $n$ -Ecke)

Ein regelmäßiges sphärisches  $n$ -Eck ist durch seinen Umkreisradius  $r \in (0, \pi/2]$  festgelegt. Berechnen Sie mit den Formeln aus 6.1 den Inkreisradius  $\rho$ , die Seitenlänge  $s$  und den Innenwinkel  $\phi$  zwischen benachbarten Seiten. Stellen Sie fest, daß  $\phi = \phi(r)$  von dem euklidischen Wert (Grenzfall für  $r \rightarrow 0$ ) monoton bis zu  $\phi(\pi/2) = \pi$  wächst.

### Aufgabe 6.3 (Winkeltreue der Stereographischen Projektion $\mathbb{S}^2 \rightarrow \{z = 1\}$ )

a) In der Vorlesung war hergeleitet worden

$$St : \mathbb{S}^2 \rightarrow \{z = 1\}, (x; y; z) \mapsto (2x, 2y)/(1+z).$$

Bestimme durch eine analoge Rechnung die Umkehrabbildung

$$St^{-1} : \{z = 1\} \rightarrow \mathbb{S}^2, (\xi; \eta) \mapsto (??; ??).$$

b) Wir hatten die Winkeltreue der Stereographischen Projektion aus deren Kreistreue gefolgert. Rechnen Sie die Winkeltreue nach:

Dazu seien  $c_j(t) = (x_j(t); y_j(t); z_j(t))$ ,  $j = 1, 2$  zwei Kurven in  $\mathbb{S}^2$  durch denselben Punkt  $c_1(0) = p = c_2(0)$ . Es gilt

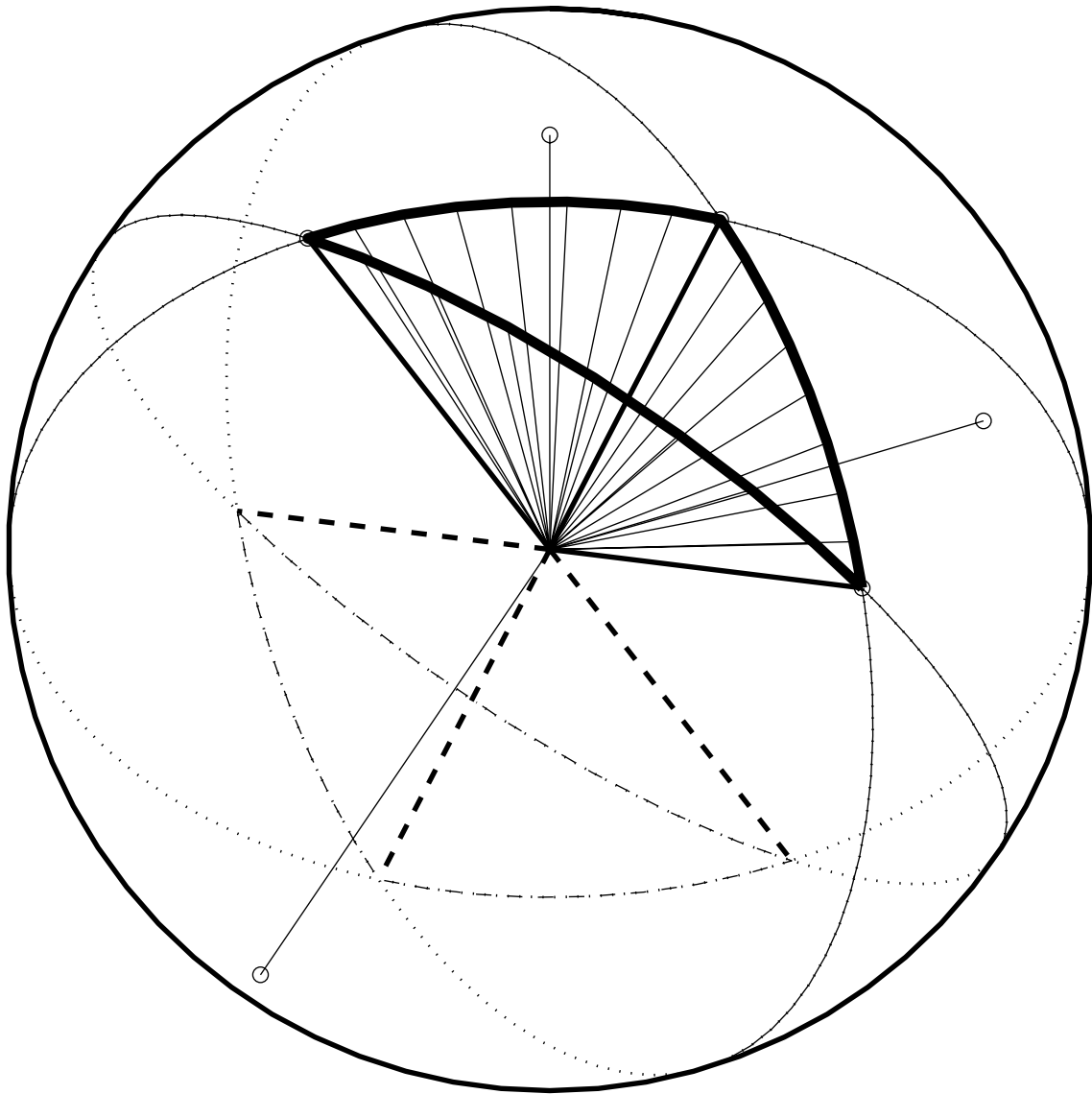
$$\cos \angle(\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0)) = \frac{\langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle}{|\dot{c}_1(0)| \cdot |\dot{c}_2(0)|} \text{ und } \langle \dot{c}_j(0), c_j(0) \rangle = 0.$$

Bilde die Kurven ab,  $\gamma_j(t) := St(c_j(t))$ , und rechne nach  $\langle \dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0) \rangle = f(p) \langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle$ ,  $f(p)$  ergibt sich aus der Rechnung. Warum zeigt das die Winkeltreue von  $St$ ?

### Aufgabe 6.4 (Sphärische Netze der Platonischen Körper)

Skizzieren Sie die sphärischen Netze der Platonischen Körper in stereographischer Projektion. Wiederholen Sie die Berechnung der Winkel aus 5.2b mit den Formeln 6.1. (Die Formeln der zweidimensionalen sphärischen Trigonometrie erfassen also manche dreidimensionale euklidische Situation in sehr übersichtlicher Weise.)





Sphärisches Dreieck.

Die Seiten des sphärisches Dreiecks mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  sind zu Großkreisen vervollständigt. Die Ebenen dieser Großkreise beranden den dreiseitigen Keil mit Spitze im Mittelpunkt der Kugel. Die Einheitsnormalen der Keilebenen liefern die Eckpunkte ( $o$ ) des Polardreiecks mit den Seiten  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$  und den Winkeln  $\pi - a, \pi - b, \pi - c$ . (Sie erkennen das Senkrechtstehen der Normalen auf den Keilebenen am besten, wenn Sie sich auf die von den drei Großkreisen berandeten Kreisscheiben konzentrieren.)

Je zwei der Großkreise zerlegen die Sphäre in vier Zweiecke, betrachtet werden sollen jeweils nur die beiden Zweiecke, die das Dreieck oder das gegenüber liegende Antipodendreieck enthalten. So erhält man je zwei Zweiecke mit den Winkeln  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$ . Zusammen überdecken sie die Sphäre, und zwar außerhalb des Dreiecks und des Antipodendreiecks einmal, die beiden Dreiecke aber dreimal. Daher gilt:

Fläche der Sphäre ( $= 4\pi$ ) + viermal Fläche des Dreiecks ist gleich der Fläche der drei Zweieckspaare ( $= 4(\alpha + \beta + \gamma)$ ). Daher ist die Dreiecksfläche

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Für Polygone eignet sich besonders gut:  $F = \text{Winkelsumme} - \text{Euklidische Winkelsumme}$ .

### 27.11.01

Das Ikosaeder wird vom Mittelpunkt auf seine Umkugel projiziert, das liefert eine Pflasterung der Sphäre mit 20 gleichseitigen Dreiecken. Die stereographische Projektion dieser Pflasterung wurde ausführlich besprochen, vgl. Aufg.6.4=7.1 .

Die Bogenlänge von Kurven auf der Sphäre wird in geographischen Koordinaten  $(\theta, \varphi)$  hergeleitet und daraus gefolgert, daß Großkreise kürzeste Kurven auf der Sphäre sind.

Für Karten der Sphäre mit konstantem Maßstab gilt: Alle Kurvenlängen werden mit demselben, dem Maßstabsfaktor geändert; kürzeste Verbindungen werden auf Kürzeste abgebildet; Kreise auf Kreise. Da der Kreisumfang als Funktion des Radius auf Sphären eine **andere Funktion** ist als in der Ebene, gibt es keine Karten der Sphäre mit konstantem Maßstab.

Behandlung der stereographischen Projektion von  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , vgl. Aufg. 7.2 .

### 29.11.01

Sprachregelung: 3-Ebenen, 2-Ebenen, Geraden in  $\mathbb{R}^4$  sind Niveaumengen von linearen Funktionen  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\text{rang}(L) = j$ . Die nichttrivialen Schnitte mit  $\mathbb{S}^3$  heißen 2-Sphären, Kreise oder Paare von Punkten. Falls die Ebenen durch den Mittelpunkt von  $\mathbb{S}^3$  gehen, spricht man von Großsphären, Großkreisen, Antipodenpunkten. Wegen der Analogie zur 2-Sphäre nennen wir die Punkte  $(0; 0; 0; 1)$  bzw.  $(0; 0; 0; -1)$  Norpol bzw. Südpol. Die Punkte, die gleich weit von diesen Polen entfernt sind,  $\mathbb{S}^3 \cap \{w = 0\}$ , bilden den Äquator von  $\mathbb{S}^3$ .

Die Bearbeitung von 7.2 und 7.4 ist notwendig zum Verständnis.

Bild des Äquators ist die Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^3$ . Bilder von Großkreisen sind Kreise (oder Geraden durch 0), die die Einheitssphäre in Antipodenpunkten schneiden. Je zwei verschiedene Großsphären schneiden sich in einem Großkreis (mit linearen Gleichungen argumentieren).

Bilder der  $\alpha$ -Linien und der  $\varphi_2$ -Linien folgender Abbildung nach  $\mathbb{S}^3$  wurden besprochen:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{S}^3.$$

Die  $\varphi_1$ -Rotationssymmetrie ist im Original und im Bild vorhanden.

---

Erinnerung an das Grundstudium: **Der Dimensionssatz.** Gegeben seien zwei Unterräume  $V_1, V_2 \subset V$ , ihre Dimensionen seien  $d_1, d_2$ . Der Durchschnitt  $U := V_1 \cap V_2$  habe Dimension  $d$ , und  $D$  sei die Dimension des Spans  $W$  von  $V_1, V_2$  ( $W$  ist der kleinste Unterraum von  $V$  der  $V_1, V_2$  enthält.) Dann gilt die

#### Dimensionsformel

$$d_1 + d_2 = d + D.$$

Beweis. Ergänze eine Basis  $\{u_1, \dots, u_d\}$  durch  $\{v_1, \dots, v_{d_1-d}\}$  bzw. durch  $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{d_2-d}\}$  zu Basen von  $V_1$  bzw.  $V_2$ . Der Spann all dieser Vektoren erzeugt sicher  $W$ , also ist  $D \leq d_1 + d_2 - d$ . Andererseits sind all diese Vektoren linear unabhängig, denn eine nichttriviale Linearkombination implizierte eine größere Dimension von  $U$ . Damit ist  $D \geq d_1 + d_2 - d$ .

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 7.1 = 6.4 (Sphärische Netze der Platonischen Körper)

Skizzieren Sie die sphärischen Netze der Platonischen Körper in stereographischer Projektion. Wiederholen Sie die Berechnung der Winkel aus 5.2b mit den Formeln 6.1. (Die Formeln der **zweidimensionalen** sphärischen Trigonometrie erfassen also manche **dreidimensionale** euklidische Situationen in sehr übersichtlicher Weise.)

### Aufgabe 7.2 (Stereographische Projektion $St: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

Die Punkte der Einheitskugel  $\mathbb{S}^3 = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$  werden von  $(0; 0; 0; -1)$  aus in den Unterraum  $\{w = 0\}$  projiziert. (Das gibt halb so große Bilder wie in  $\{w = 1\}$ .) Sie sollten die folgenden Abbildungsformeln herleiten können:

$$St(x; y; z; w) = \frac{1}{w+1}(x; y; z; 0) =: (\xi; \eta; \zeta; 0),$$

$$St^{-1}(\xi; \eta; \zeta) = \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}(2\xi; 2\eta; 2\zeta; 1 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2))$$

Die 16 Punkte  $0.5 \cdot (\pm 1; \pm 1; \pm 1; \pm 1)$  sind die Ecken eines "Hyper"würfels, dessen Umkugel den Radius 1 hat. Stellen Sie fest, daß die stereographischen Bilder der acht  $w = +1$  Punkte  $0.5 \cdot (\pm 1; \pm 1; \pm 1; +1)$  die Ecken eines Würfels innerhalb der Einheitskugel ( $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ) in  $\mathbb{R}^3$  sind. (Die Bilder der übrigen 8 Ecken bilden einen größeren Würfel.) Bestimmen Sie die Gleichung der Sphäre in  $\mathbb{R}^3$ , die den Einheitskreis  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ,  $\zeta = 0$  und die Bilder der "oberen" 4 Punkte  $0.5 \cdot (\pm 1; \pm 1; +1; +1)$  enthält. (Wo liegt der Mittelpunkt der Sphäre?)

### Aufgabe 7.3 (Definition der Quaternionen)

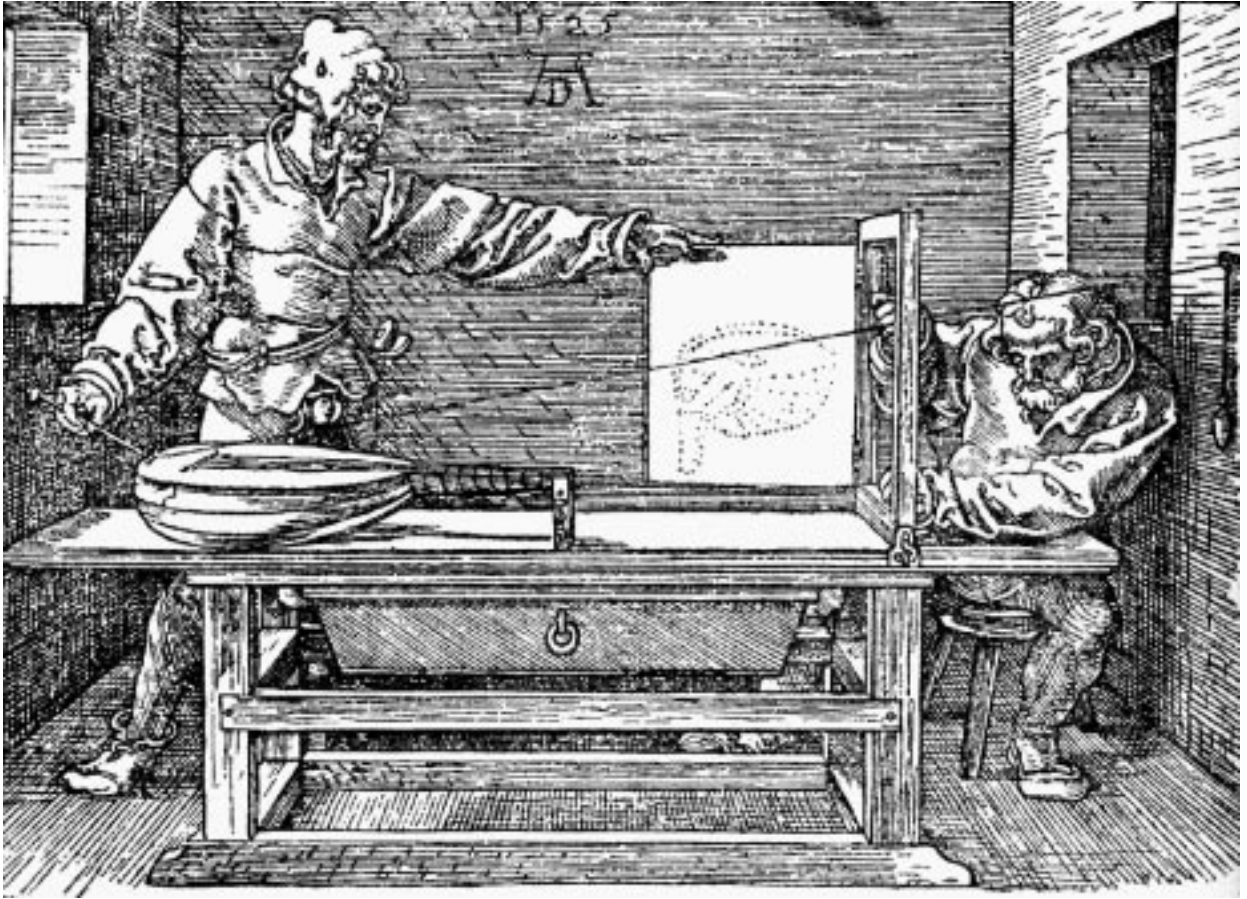
Definiere die komplexen  $2 \times 2$  Matrizen

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die **reellen** Linearkombinationen dieser vier Matrizen bilden einen über  $\mathbb{R}$  vierdimensionalen Vektorraum  $\mathbb{H}$ , genannt Quaternionen. Der Spann von  $\mathbf{1}$  bildet die reellen, der Spann von  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  bildet die imaginären Quaternionen. Zu einer Quaternion  $q = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$ , kurz  $q = (a, b, c, d)$ , heißt  $\bar{q} := (a, -b, -c, -d)$  die zu  $q$  konjugierte Quaternion. Zeige  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ . Verifiziere  $q \cdot \bar{q} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot \mathbf{1}$ . Verabredet man  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  als Orthonormalbasis, so wird  $|q| := \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$  die Euklidische Länge von  $q$ . Zeige  $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$ . Folgere, daß die Einheitsquaternionen ( $|q| = 1$ ) eine Gruppe bilden. Zeige: Für imaginäre Quaternionen ( $a = 0$ ) gilt  $q^2 = -|q|^2$ .

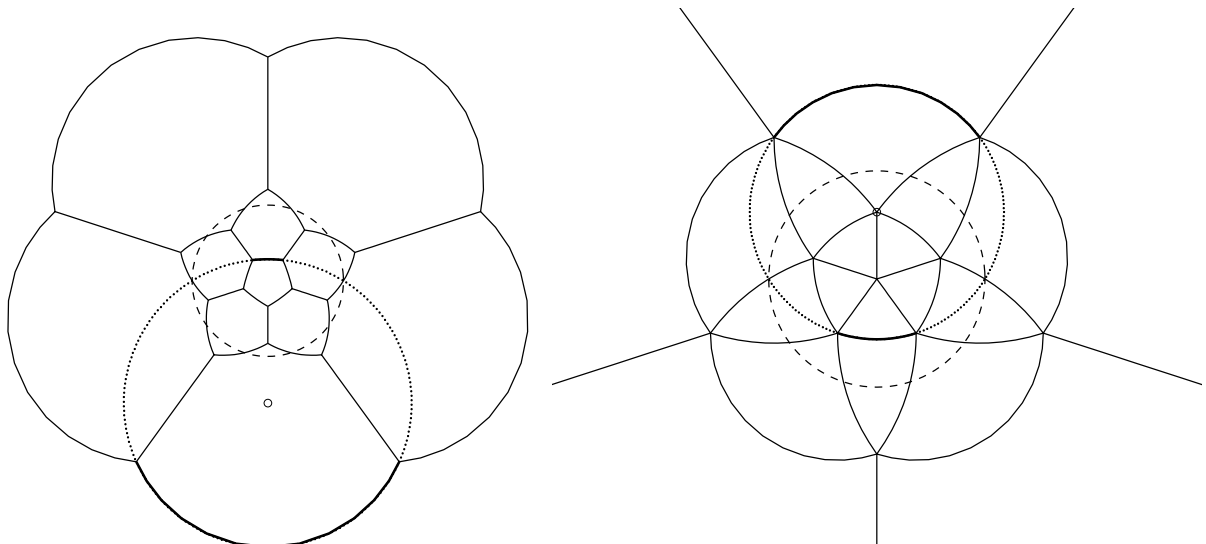
### Aufgabe 7.4 (Sphärentreue der Stereographischen Projektion $\mathbb{S}^3 \rightarrow \{w = 0\}$ )

Zeigen Sie mit der Formel für  $St^{-1}$  aus 7.2, daß die Urbilder von 2-Sphären  $(\xi - m_1)^2 + (\eta - m_2)^2 + (\zeta - m_3)^2 - r^2 = 0$  eine lineare Gleichung in  $\mathbb{R}^4$  erfüllen, daß also die Urbilder wieder Sphären in  $\mathbb{S}^3$  sind.



Mühsame Perspektive, mathematische Modellierung hilft.

Zuerst wird ein Faden von dem abzubildenden Punkt der Laute zum Zentrum (Nagel in der Wand) gespannt. Dann werden im Bildrahmen ein horizontales und ein vertikales Lineal an den Faden geschoben, um den Durchstoßpunkt des Fadens mit der Bildebene zu markieren. Schließlich wird der Faden entfernt, das Zeichenpapier in die Bildebene geklappt und der Bildpunkt gezeichnet (an der Kreuzung der Lineale).



Stereographische Projektionen der sphärischen Netze von Dodekaeder und Icosaeder. Die gestrichelten Kreise sind die Äquatoren der stereographischen Karten. Die punktierten Kreise sind Großkreise, die gegenüberliegende Kanten enthalten.

### 4.12.01

Erklärung der Funktionentheorie Bilder auf Blatt 8, da sie auch als stereographische Bilder einer Drehung der (Riemannschen Zahlen-)Kugel gelesen werden können.

Die standard Platonischen Körper in  $\mathbb{R}^n$ , Simplex, Hyperoktaeder und Hyperwürfel. Das Simplex sieht man am besten in  $\mathbb{R}^{n+1}$  als konvexe Hülle der Spitzen einer ON-Basis; so taucht das Simplex auch als Randpolyeder des Hyperoktaeders auf. Wiederholung: Unterräume werden als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme beschrieben.

Jeder Platonische Körper kann vom Mittelpunkt auf seine Umkugel projiziert werden und erlaubt dann eine Beschreibung in einer um 1 kleineren Dimension: statt als Polyeder in  $\mathbb{R}^n$  als Pflasterung der  $\mathbb{S}^{n-1}$  mit  $(n-1)$ -dimensionalen sphärischen Polyedern. Das ist vor allem für  $\mathbb{R}^4$  wichtig, weil die stereographische Projektion *anschauliche* Bilder von  $\mathbb{S}^3$  zu zeichnen erlaubt.

Die 8(-1) Bilder der Ecken des 4-Oktaeders und die sechs von jeder Ecke ausgehenden Kanten werden in ein dreidimensionales stereographisches "Bild" eingezeichnet. Man erkennt die von den Kanten aufgespannten sphärischen Randdreiecke ( $90^\circ$  Winkel) und die sphärischen Tetraeder mit  $90^\circ$  Diederwinkeln.

### 6.12.01

Projektion von Strecken und von Dreiecken von  $0 \in \mathbb{R}^n$  auf die  $(n-1)$ -Sphäre in  $\mathbb{R}^n$  kann man sich immer in 2- bzw. 3-dimensionalen Unterräumen, also anschaulich, vorstellen. Einüben an den Schnittpunktsätzen am Dreieck (Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende; *gleich weit entfernt von zwei Punkten, zwei Halbgeraden ...*).

Wichtig ist die Übersetzung von *liegt auf verschiedenen Seiten einer Ebene* in höhere Dimensionen. Beschreibe Hyperebenen in  $\mathbb{R}^n$  als Niveaus linearer Funktionen  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{\ell = w\}$ . Definition: "Die Punkte  $\{\ell > w\}$  liegen auf der einen Seite, die Punkte  $\{\ell < w\}$  liegen auf der anderen Seite." Rechtfertigung: Die Verbindungsstrecke  $p \cdot (1-t) + q \cdot t$  von Punkten auf verschiedenen Seiten schneidet die Hyperebene, die Verbindung von Punkten auf derselben Seite schneidet nicht.

Noch einmal die Bilder der 16 Randtetraeder des 4-Oktaeders. Betrachte die lineare Funktion  $\ell(x) := +x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . Sie hat die Punkte  $e_1, e_2, e_3, e_4$  auf dem Niveau  $\ell = 1$ , die anderen vier Punkte liegen wegen  $\ell(-e_j) = -1$  alle auf einer Seite. Daher ist die konvexe Hülle der vier Punkte  $e_1, e_2, e_3, e_4$  ein dreidimensionales Randtetraeder des untersuchten 4-Oktaeders. Die anderen 15 erhält man mit anderen Vorzeichen in der Definition von  $\ell$ .

Ankündigung: Die Mittelpunkte (Definition?) der 16 Tetraeder sind die Ecken einer Würfelpflasterung.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 8.1 (Lineare Gleichungssysteme)

Formulieren Sie die drei Hauptsätze über lineare Gleichungssysteme und illustrieren Sie diese an Beispielen aus  $\mathbb{R}^4$ . (Notwendige und hinreichende Bedingungen brauchen zwei Beispiele).

a) (Un-)Lösbarkeit inhomogener Systeme. b) Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen Systemen. c) Lösungsdimension homogener Systeme.

### Aufgabe 8.2 (Daten sphärischer Oktaeder)

Berechne aus dem Umkugelradius  $R$  eines sphärischen Oktaeders dessen andere Größen: Kantenlänge  $A$ , Seitenhalbierende  $h$  einer Dreiecksfläche, Diederwinkel  $\theta$ , Abstand  $c$  des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden eines Dreiecks von einer Ecke, Winkel  $\alpha$  der Dreiecksflächen, Inkugelradius  $r$ . (Kontrolle bei  $R = \pi/2 = r$ .)

### Aufgabe 8.3 (Dirichlet-Zellen)

Es sei  $v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^2$ . Zeige:

- $G := \mathbb{Z} \cdot v_1 + \mathbb{Z} \cdot v_2$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{R}^2$ .
- Für jedes  $x \in \mathbb{R}^2$  sei  $G \cdot x := \{y \in \mathbb{R}^2; y = g + x, g \in G\}$  die  $G$ -Bahn von  $x$ . Für jedes  $y \in \mathbb{R}^2$  definiere dessen Dirichlet-Zelle  $D(y) := \{z \in \mathbb{R}^2; |y - z| \leq |(g + y) - z| \text{ für alle } g \in G, g \neq \text{id}\}$ .  
Zeige:  $D(g + y) = g + D(y)$ .
- Zeichne  $D(0)$ .

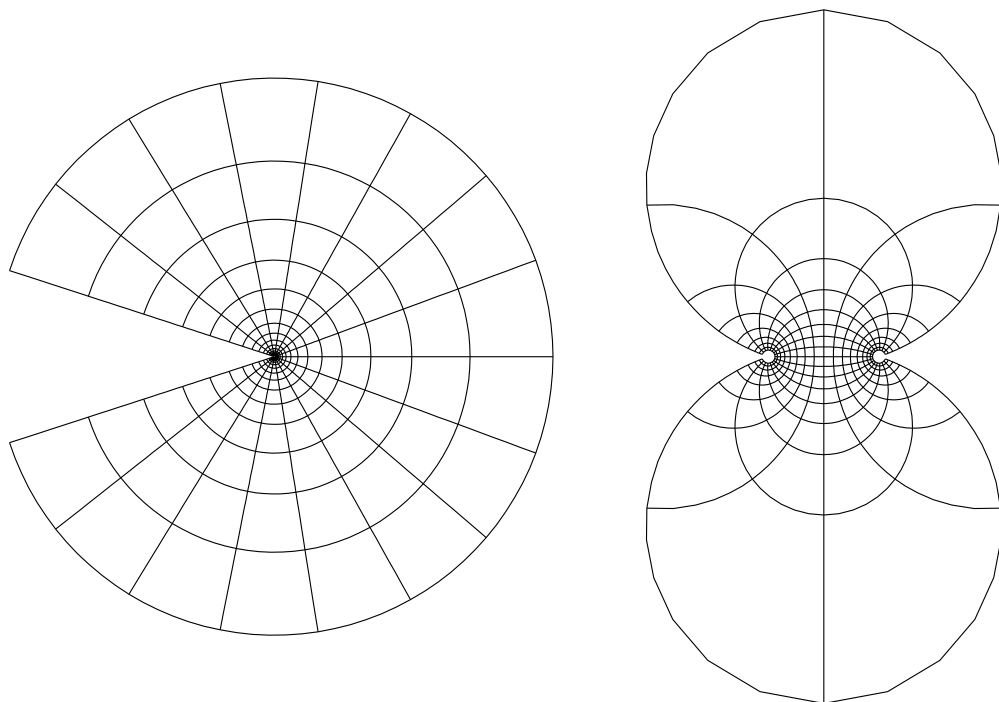
### Aufgabe 8.4 (Drehungen des $\mathbb{R}^3$ und Quaternionen (Fortsetzung von 7.3))

Den Imaginärteil der Quaternionen,  $\text{Im } \mathbb{H} = \text{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , sehen wir als  $\mathbb{R}^3$  an. Definiere für jede Einheitsquaternion  $q \in \mathbb{H}, |q| = 1$  eine Abbildung

$$L_q : \text{Im } \mathbb{H} \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}, L_q(v) := q \cdot v \cdot q^{-1}.$$

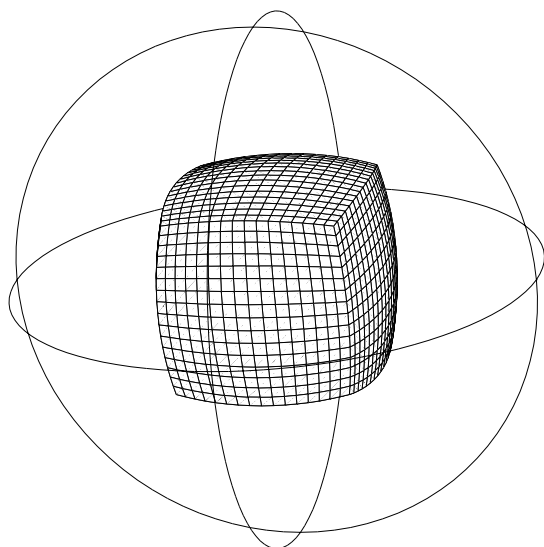
- $L_q$  ist orthogonal:  $|L_q(v) - L_q(w)| = |v - w|$  (Nach Wahl  $v, w \in \mathbb{H}$ , oder  $v, w \in \text{Im } \mathbb{H}$ ).
- Sind  $p, q \in \mathbb{H}, |p| = 1, |q| = 1$ , so gilt  $L_{p \cdot q} = L_p \circ L_q$  (Gruppenhomomorphismus).
- Drehachse von  $L_q$ :  $L_q(\text{Im}(q)) = \text{Im}(q)$  (Eigenvektor zum Eigenwert 1).
- Es seien  $v, w \in \text{Im } \mathbb{H}$  senkrecht auf einander, also mit Pythagoras:  $v\bar{v} + w\bar{w} = |v + w|^2$ .  
Zeige:  $v \cdot w = -w \cdot v$ .
- Es sei  $q := \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \mathbf{i}$ . Wie groß ist der Drehwinkel von  $L_q$ ?

Propaganda für Dirichletzellen. Von der Zahlentheorie bis zur diskreten Optimierung begegnet man Situationen in denen man den "Einflußbereich" gewisser ausgezeichneten Punkte definieren möchte. Falls diese ausgezeichneten Punkte diskrete (z.B. endliche) Teilmengen *metrischer* Räume sind, so ist eine ebenso naheliegende wie leistungsfähige Definition des *Einflußbereichs* oder der *Dirichletzelle* oder der *Voronoizelle*  $D(P)$  von  $P$ :  $D(P)$  ist die Menge aller Punkte des metrischen Raums, die *näher* an  $P$  liegen als an irgendeinem anderen der ausgezeichneten Punkte, s.S.28.



Ergänzung: Die komplexe Funktion  $z \mapsto (1 - z)/(1 + z)$ .

Stellen Sie sich die Gaußsche Zahlenebene  $\mathbb{C}$  als stereographisches Bild der “Riemannschen Zahlenkugel”  $S^2$  vor. Die Abbildung  $z \mapsto 1/z$  in  $\mathbb{C}$  entspricht dabei der  $180^\circ$  Drehung der Zahlenkugel um die erste Koordinatenachse. Wegen der (bekannten!) Kreistreue der stereographischen Projektion ist daher auch  $z \mapsto 1/z$  kreistreu. (Das läßt sich auch ohne Kenntnis der stereographischen Projektion nachrechnen.) Die dargestellte Abbildung ist wegen  $(1 - z)/(1 + z) = -1 + 2/(1 + z)$  kreistreu. Das linke Bild kann man so interpretieren, daß aus dem Polarkoordinatennetz auf der Zahlenkugel ein Großkreiszweieck herausgeschnitten ist. Auf dem rechten Bild fehlt dasselbe Großkreiszweieck, aber nun auf der Rückseite der Zahlenkugel.



Stereographische Projektion eines sphärischen Würfels, dessen Diederwinkel  $120^\circ$  betragen. Das Bild der Äquatorsphäre wird durch drei Großkreise angedeutet. Die Kantenlänge ist  $\pi/3$ , die Dicke (zwischen Flächenmitten) ist  $\pi/2$ . Die Schnittpunkte der drei Großkreise sind die Mittelpunkte der sechs benachbarten (gleich großen) Würfel. (Für die Koordinaten der Eckpunkte vgl. 7.2 .)

### 11.12.01

Behandlung sphärischer Platonischer Polyeder.

Erinnerung: Die Projektion einer Strecke  $P_1P_2$  vom Mittelpunkt  $M = (0; 0; 0; 0)$  auf die  $\mathbb{S}^3$  gibt einen Großkreisbogen. Dies ist die kürzeste Verbindung auf der Sphäre. Zu drei Punkten  $P_1, P_2, P_3$  finden wir so ein Großkreisdreieck; natürlich sprechen wir weiter von den Seiten des Dreiecks. Die inneren Punkte des euklidischen Dreiecks  $P_1P_2P_3$  ergeben unter Projektion von  $M$  das Innere des sphärischen Dreiecks, *und dies ganze Dreieck liegt auf der Großsphäre*  $\mathbb{S}^3 \cap \text{span}(M, P_1, P_2, P_3)$ . Die Großsphären in  $\mathbb{S}^3$  spielen dort also die Rolle der Ebenen in  $\mathbb{R}^3$ . Ein sphärischer Platonischer Körper ist also von regulären  $n$ -Ecken berandet, jedes solche  $n$ -Eck liegt auf einer Großsphäre, Bilder auf Blatt 8 und 9.

Wir beschreiben sphärische Polyeder anschaulich nach stereographischer Projektion in den  $\mathbb{R}^3$ . Legt man den Mittelpunkt  $M$  des Polyeders in das Zentrum  $0 \in \mathbb{R}^3$  der stereographischen Karte, so sind die Großkreisverbindungen von  $M$  zu den Ecken  $E$ , zu den Kantenmitten  $K$  und zu den Flächenmitten  $F$  gerade Strecken. Von  $M$  aus betrachtet sehen also sphärische Platonische Körper genauso aus wie wir es aus dem Euklidischen kennen. Der von  $M$  ausgehende Keil mit den rechtwinkligen Randdreiecken  $MFK, MKE, MEF$  hat daher bei  $M$  dieselben Winkel wie im euklidischen Fall, genannt  $\omega_{FK}, \omega_{KE}, \omega_{EF}$ . Projiziert man den Keil von  $M$  auf die Einheits-2-Sphäre, so erhält man ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit Hypotenuse  $\omega_{EF}$  und den Katheten  $\omega_{FK}, \omega_{KE}$ . Der Winkel  $\varphi = \angle(KFE)$  ist gleich  $\pi/(\text{Anzahl der Kanten eines Seitenpolygons})$ , der Winkel  $\alpha = \angle(KEF)$  ist gleich  $\pi/(\text{Anzahl der Kanten zur Ecke des Polyeders})$ . Durch den gewünschten Polyeder sind diese beiden Winkel gegeben, z.B.  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$  für den Würfel. Aus den Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke auf Blatt 6 werden die Winkel  $\omega$  bestimmt:

$$\cos \omega_{FE} = \cot \alpha \cdot \cot \varphi, \quad \omega_{KF} = \frac{\cos \alpha}{\sin \varphi}, \quad \omega_{KE} = \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha}.$$

In der weiteren Behandlung unterscheiden sich die euklidischen und die sphärischen Polyeder. Wegen  $MF = \text{Inradius} =: r$ ,  $ME = \text{Umradius} =: R$  findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck  $MEF$  die Beziehung  $\cos \omega_{FE} = \tan r / \tan R$ . Insbesondere ist  $r \rightarrow R(r)$  monoton wachsend mit  $\lim_{r \rightarrow 0} R(r)/r = \text{euklidischer Wert}$  und  $R(r = \pi/2) = \pi/2$ . Ferner findet man aus dem Dreieck  $MKF$  den halben Diederwinkel  $\vartheta := \angle(MKF)$  mit der Formel  $\cos \vartheta = \cos r \cdot \sin \omega_{KF}$ . Schließlich liefert das Dreieck  $MKE$  mit Hypotenuse  $R$  die halbe Kantenlänge  $A := KE$  des Polyeders,  $\sin A = \sin R \cdot \sin \omega_{KE}$ .

Für den Würfel mit  $\vartheta = 60^\circ$  findet man  $r = 45^\circ$ ,  $R = 60^\circ$ ,  $2A = 60^\circ$ . Die Pflasterung von  $\mathbb{S}^3$  mit acht solchen Würfeln ist auf Blatt 9 in stereographischer Projektion dargestellt.

Wegen  $R = 60^\circ = 2A$  ist eng mit dieser Würfelpflasterung eine Oktaederpflasterung verbunden. Jeder Würfel wird vom Mittelpunkt aus in sechs quadratische Pyramiden zerlegt. Zwei solche ergeben eine oktaederähnliche Doppelpyramide. Im Euklidischen Fall sind die schrägen Pyramidenkanten kürzer als die Quadratseiten, so daß nur ein gestauchtes Oktaeder entsteht. Bei dem sphärischen Würfel mit  $\vartheta = 60^\circ$  ist die Kantenlänge  $2A$  gleich dem Umkugelradius  $R$ , so daß in diesem Fall die Doppelpyramiden echte Oktaeder (mit Diederwinkel =  $120^\circ$ ) sind. Die untere Figur auf Blatt 9 zeigt wie zu jeder Quadratseite der Würfelpflasterung ein solches Oktaeder gehört, die Sphäre also mit  $8 \cdot 6/2$  Oktaedern gepflastert ist.

Mit dieser Oktaederpflasterung von  $\mathbb{S}^3$  haben wir nach 4-Simplex, 4-Würfel und 4-Oktaeder einen vierten Platonischen Körper im  $\mathbb{R}^4$  gefunden. Meist wird er 24-Zell genannt.



## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 9.1 (Lineare Funktionen, Lineare Gleichungssysteme)

Erinnerung: Das Oktaeder in  $\mathbb{R}^3$  ist definiert als die konvexe Hülle der sechs Punkte  $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ . Betrachte außerdem die acht Ebenen

$$\ell(x) := \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 1.$$

- a) Warum liegt das Oktaeder ganz auf einer (abgeschlossenen) Seite jeder dieser Ebenen? Was ändert sich an den Gleichungen, wenn das Oktaeder in dem dreidimensionalen Unterraum  $x_4 = 0$  des  $\mathbb{R}^4$  liegt? Was muß man ändern, wenn man ein kleineres oder größeres Oktaeder haben möchte?
- b) Der  $\mathbb{R}^3$  mit den 6 Oktaederecken werde als stereographisches Bild von  $\mathbb{S}^3$  mit den Bildern der Ecken eines sphärischen Oktaeders (sphärischer Umkugelradius  $0 < R < \pi/2$ ) betrachtet. Welche Koordinaten haben die Ecken des Bildes als Funktionen von  $R$ ?

### Aufgabe 9.2=8.2 (Daten sphärischer Oktaeder)

Da ich nicht dazu gekommen bin, die sphärischen Würfel vorzuführen, noch einmal:

Berechnen Sie aus dem Umkugelradius  $R$  eines sphärischen Oktaeders (unter Benutzung der Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke) dessen andere Größen:

Kantenlänge  $A$ , Seitenhalbierende  $h$  einer Dreiecksfläche, Diederwinkel  $\theta$ , Abstand  $c$  des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden eines Dreiecks von einer Ecke, Winkel  $\alpha$  der Dreiecksflächen, Inkugelradius  $r$ . (Kontrolle bei  $R = \pi/2 = r$ .)

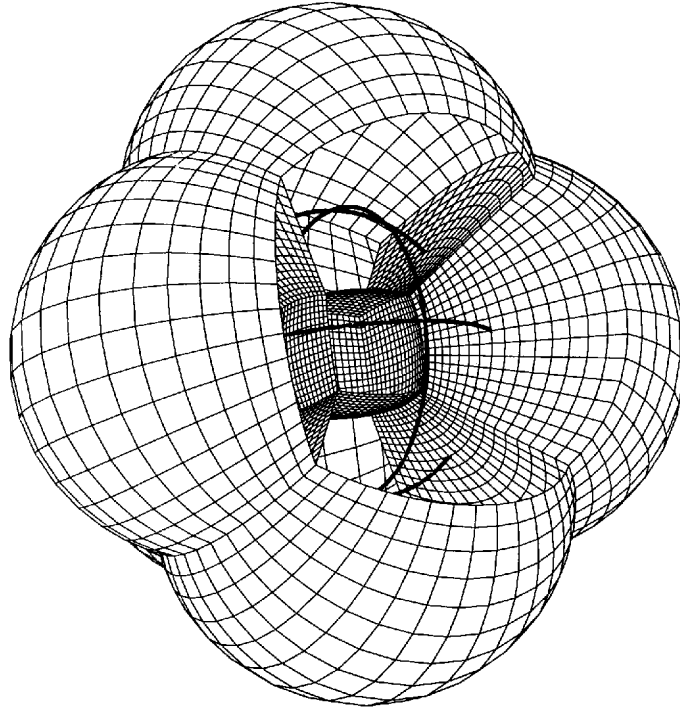
### Aufgabe 9.3 (Drehungen des $\mathbb{R}^3$ und Quaternionen (Fortsetzung von 7.3, 8.4))

- a) Es sei  $v \in \text{Im } \mathbb{H}$ ,  $|v| = 1$  und  $q := \cos \alpha \cdot \mathbf{1} + \sin \alpha \cdot v$ . Was sind Drehachse und Drehwinkel von  $L_q$ ?
- b) Jeder Großkreis  $\varphi \in \mathbb{R} \mapsto \cos \varphi \cdot \mathbf{1} + \sin \varphi \cdot v$  ist eine Untergruppe der Gruppe der Einheitsquaternionen ( $\mathbb{S}^3$ ).
- c) Gegeben sei eine (z.B. endliche) Untergruppe  $U \subset SO(3) = SO(\text{Im } \mathbb{H})$ . Definiere  $\hat{U} := \{q \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}; L_q \in U\}$ . Zeige, daß  $\hat{U}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{S}^3$  ist.

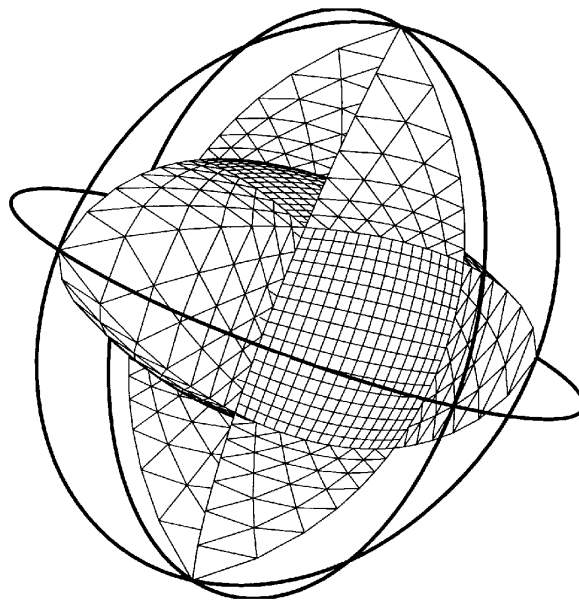
### Aufgabe 9.4 (Dirichlet-Zellen in dem metrischen Raum $\mathbb{S}^3$ )

$\{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{S}^3$ .

- a) Wie sehen die Dirichletzellen dieser acht Punkte in  $\mathbb{S}^3$  aus? (Dargestellt in stereographischer Projektion)
- b) Zeige, daß das Bild dieser Gruppe in  $SO(3)$  aus id und den drei  $180^\circ$  Drehungen eines (welches?) Tetraeders besteht.
- c) Dieses Tetraeder besitzt acht  $120^\circ$  Drehungen, deren Drehachsenrichtungen die Raumdiagonalen eines (welches) Würfels sind. Welche 16 Punkte im stereographischen Bild von  $\mathbb{S}^3$  werden unter der Abbildung  $q \rightarrow L_q$  auf diese  $120^\circ$  Drehungen abgebildet?
- d) Wie sehen die Dirichletzellen der 16 Punkte aus c) in  $\mathbb{S}^3$  aus?



Die Würfelpflasterung von  $\mathbb{S}^3$  in stereographischer Projektion.  
 Es fehlen einige Quadratflächen, damit man besser in die Figur hineinsehen kann. Man kann sieben Würfel zählen, der achte wird durch das Außengebiet dargestellt. Die dicken Kreise liegen in den Koordinatenebenen auf der Einheitssphäre.



Würfel in  $\mathbb{S}^3$  mit vier Oktaederpyramiden, zwei davon halb offen.  
 Spiegelt man die Pyramiden an den Würfel­flächen, so treffen sie sich in der Mitte des Würfels. Pyramide und Spiegelbild setzen sich zu einem sphärischen Oktaeder mit  $120^\circ$  Diederwinkel zusammen. 24 Oktaeder ergeben eine Pflasterung von  $\mathbb{S}^3$ .

### 13.12.01

Wegen der Diskussion am 11.12. über Willkür bei der Definition der Seitenflächen sphärischer Polyeder habe ich die Sprachregelung vom 29.11. noch einmal wiederholt. Platonische Polyeder im  $\mathbb{R}^4$  sind als konvexe Hülle ihrer Ecken definiert. Eine lineare Funktion  $\ell : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf einigen Ecken den Wert  $w$  hat, auf allen übrigen Ecken aber Werte  $< w$  hat, erlaubt, die konvexe Hülle der ersten Ecken (Wert  $w$ ) als Teil des Randes (Kante, 2-dim Polygon, 3-dim Polyeder) zu erkennen.

*Die Zentralprojektion nach  $\mathbb{S}^3$  bildet Kanten auf Großkreisbögen ab, 2-dim Polygone auf sphärische Großkreispolygone, deren Inneres Teil einer 2-dim Großsphäre ist. Die 3-dim euklidischen Polyeder werden projiziert auf sphärische Polyeder mit Großkreisanten und Großsphären-Randpolygonen.*

Die Behandlung der Platonischen Polyeder erfolgt in zwei Schritten, erstens betrachtet man sie vom Mittelpunkt  $M$  aus, dann sind die drei Winkel des Keils zu bestimmen, dessen Kanten  $M$  mit einer Flächenmitte  $F$ , einer Kantenmitte  $K$  bzw. einer Polyederecke  $E$  verbinden. Das wird mit 2-dim sphärischer Geometrie gemacht und ist für euklidische und für sphärische Polyeder dasselbe. Zweitens werden In- und Umkugelradius, Kantenlänge und Diederwinkel des Polyeders (mit Formeln für rechtwinklige, gegebenenfalls sphärische, Dreiecke) bestimmt. Für sphärische Platonische Körper sind diese Daten monotone Funktionen z.B. des Inkugelradius.

Kommentare zu den Quaternionen-Aufgaben, vor allem: Die Abbildung  $q \mapsto L_q$ ,  $L_q(x) := q \cdot x \cdot q^{-1}$ , bildet die Einheitsquaternionen  $\mathbb{S}^3$  auf Drehungen des 3-dim Raumes  $\text{Im}(\mathbb{H})$  so ab, daß  $\text{Im}(q)$  die Drehachse von  $L_q$  ist und  $\text{Winkel}(1, q) = 0.5 * \text{Drehwinkel}(L_q)$ . Wir haben einen Würfel in die Mitte einer 3-dim stereographischen Karte von  $\mathbb{S}^3$  gezeichnet und die Drehachsen seiner Symmetrie-Rotationen eingetragen. Die zu  $180^\circ$  Drehungen gehörenden  $q$  liegen in den Schnittpunkten mit der Äquatorsphäre, die  $q$  zu  $90^\circ$  Drehungen haben Abstand  $45^\circ$  vom Mittelpunkt der Karte, und die  $q$  zu  $120^\circ$  Drehungen haben Abstand  $60^\circ$  vom Mittelpunkt.

### 18.12.01

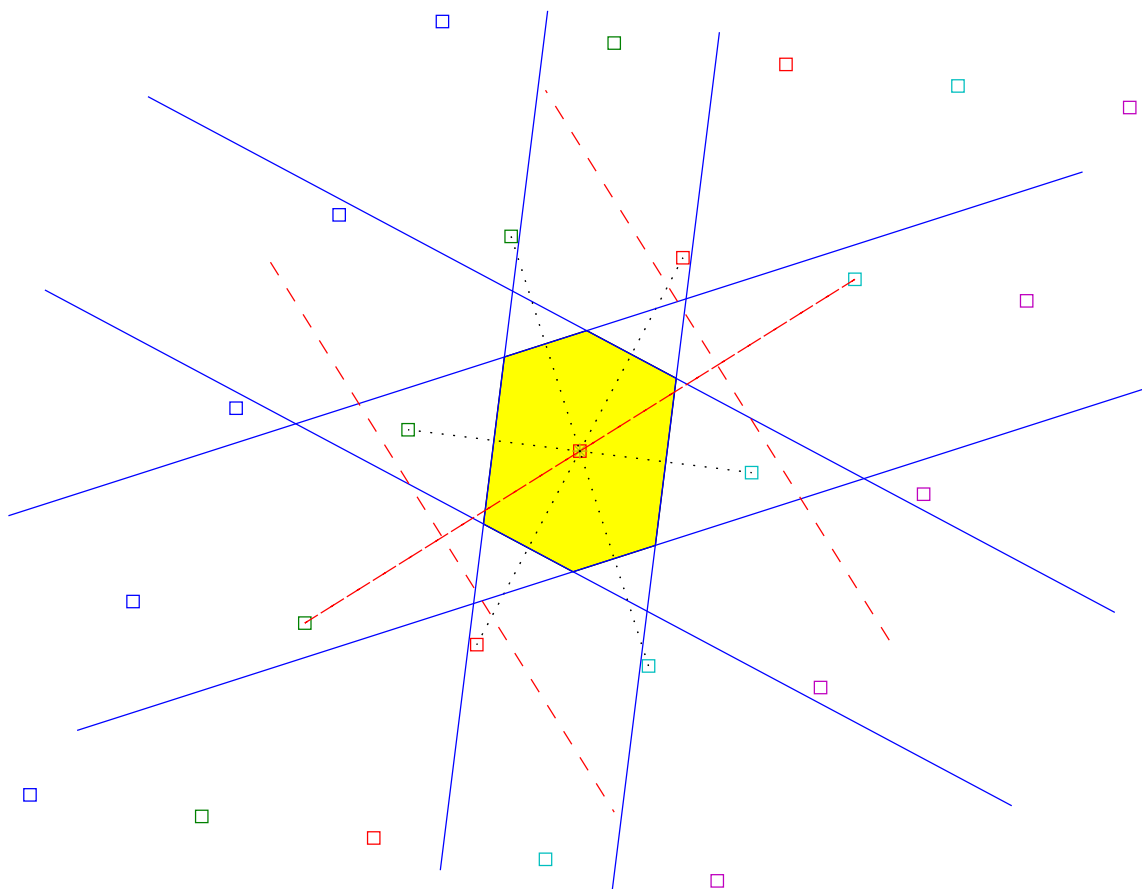
Verschiedene Wiederholungen aus dem Umfeld der Quaternionen, vgl. Aufgaben. Die Hyperbene der Mittelsenkrechten einer Strecke  $pq$  in  $\mathbb{R}^n$  teilt den  $\mathbb{R}^n$  in die Punkte, die näher an  $p$  als an  $q$  sind und umgekehrt. Auf der  $(n - 1)$ -Sphäre gilt derselbe Satz, wenn man Großkreis-Mittelsenkrechte meint. Mit diesen Großsphären als "Symmetrie-Ebenen" kann man in  $\mathbb{S}^3$  ebenso Dirichletzellen finden, wie in  $\mathbb{R}^3$  oder in Aufg. 8.3. Z.B. zu der Untergruppe  $\{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  findet man die Würfelpflasterung auf Blatt 9. Zur Interpretation solcher Bilder muß man sich oft genug klar machen, daß das Bild jeder 2-Großsphäre die Äquator-2-sphäre in Großkreisen schneidet und daß der Schnittwinkel angibt, wie groß der Maximalabstand dieser beiden 2-Großsphären ist.

Da wir die Diskussion von  $\mathbb{S}^3$  mit der Zentralprojektion Platonischer Polyeder im  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{S}^3$  begonnen haben, erinnere ich daran, daß die Würfelpflasterung auf Blatt 9 auch das stereographische Bild der Rand-3-Würfel des 4-dim Würfels ist.

Schließlich ist die Würfelpflasterung auf Blatt 9 geeignet, die Multiplikation in  $\mathbb{S}^3$  zu veranschaulichen. Da Multiplikation mit  $\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$  Isometrien von  $\mathbb{S}^3$  sind, werden die Dirichletzellen dieser Punkte permutiert, z.B. bei Multiplikation mit  $\mathbf{i}$  werden die Dirichletzellen von  $-\mathbf{i}, 1, \mathbf{i}, -1$  auf dem Großkreis durch diese vier Punkte um  $\pi/2$  vorwärts

geschoben, ebenso die Dirichletzellen von  $\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$  auf deren Großkreis. Betrachtet man die beiden Bewegungen gemeinsam, so sieht man, daß die Kanten des Quadrates zwischen  $-\mathbf{i}$  und  $\mathbf{1}$  nicht einfach parallel in das gegenüberliegende Quadrat (zwischen  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{i}$ ) geschoben werden, sondern zusätzlich um  $\pi/2$  gedreht werden. Der Quotient von  $\mathbb{S}^3$  durch die Untergruppe  $\{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  kann daher veranschaulicht werden, indem man einen dieser Würfel als Fundamentalbereich der Gruppenoperation nimmt und gegenüberliegende Quadrate (mit einer zusätzlichen  $90^\circ$  Drehung) identifiziert.

Dieselbe Diskussion ist auf Blatt 10 unter Verwendung von Aufg. 9.3c mit der Symmetriegruppe des Dodekaeders (60 Elemente in  $SO(3)$ , 120 in  $\mathbb{S}^3$ ) durchgeführt. (Warnung. Die Symmetriegruppe des Würfels/Oktaeders liefert keine Platonische Pflasterung von  $\mathbb{S}^3$ , denn: Die nächsten Nachbarn der Identität sind die  $90^\circ$  Drehungen, diese werden durch Quaternionen repräsentiert, die den halben Abstand,  $45^\circ$ , von  $\mathbf{1} \in \mathbb{S}^3$  haben und deren Imaginärteile proportional zu den Flächennormalen des Würfels sind (“des” Würfels, dessen Symmetriegruppe wir meinen). Näher an  $\mathbf{1}$  als an diesen nächsten Nachbarn sind genau die Punkte eines sphärischen Würfels mit Inkugelradius  $45^\circ/2$  (und Mittelpunkt  $\mathbf{1}$ ). Die nächst weiteren Nachbarn von  $\mathbf{1}$  sind die zu den  $120^\circ$  Drehungen um die Raumdiagonalen “des” Würfels gehörenden Quaternionen. Sie haben Abstand  $60^\circ$  von  $\mathbf{1}$ , aber das ist noch so nah, daß die Mittelsenkrechten-Sphären zwischen  $\mathbf{1}$  und diesen zweitnächsten Nachbarn dem im ersten Schritt gefundenen  $22.5^\circ$ -Würfel noch die Ecken abschneiden. Das ist beim Dodekaeder wegen der größeren Anzahl der  $72^\circ$  Drehungen nicht der Fall.)



Die Dirichletzelle eines Punktes wird mit den Mittelsenkrechten zu den nächsten Nachbarpunkten konstruiert. Entferntere Mittelsenkrechte lassen die Zelle auf einer Seite.

## Geometrie für Lehramt

Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage.

### Aufgabe 10.1 (Argumentieren mit Definitionen)

Ein Punkt auf einem perspektiven Bild ist das Bild *aller* Punkte der Projektionsgeraden. Bei Wahl einer anderen Bildebene sind die Bildpunkte die Bilder *derselben* Projektionsgeraden. Daher definieren wir zu einem  $d$ -dimensionalen Vektorraum  $V^d$ :

Die eindimensionalen Vektorunterräume heißen (projektive) Punkte. Die Menge der eindimensionalen Vektorunterräume eines  $(k+1)$ -dimensionalen Vektorunterraums heißt  $k$ -dimensionaler projektiver Unterraum (bzw. bei  $k+1=d$ : der zu  $V^d$  gehörende  $(d-1)$ -dim projektiver Raum  $P^{d-1}V$ ).

Zeige: Ist  $k+l=d-1$ , so schneiden sich ein  $k$ -dimensionaler und ein  $l$ -dimensionaler projektiver Unterraum von  $P^{d-1}V$  mindestens in einem Punkt.

Wir definieren auch:

Der Durchschnitt eines  $(k+1)$ -dimensionalen Vektorunterraums von  $V^d$  mit der  $(d-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{d-1} \subset V^d$  heißt  $k$ -dimensionale Großsphäre von  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Zeige: Ist  $k+l=d$ , so schneiden sich eine  $k$ -dimensionale und eine  $l$ -dimensionale Großsphäre von  $\mathbb{S}^{d-1}$  mindestens in einem Großkreis (= 1-dim Großsphäre).

### Aufgabe 10.2 (Daten der sphärischen Tetraeder)

Nachdem ich die sphärischen Würfel vorgeführt und Sie die Oktaeder (Aufg. 9.2) behandelt haben:

Bestimmen Sie (z.B. aus dem halben Diederwinkel  $\vartheta$ ) die übrigen Daten eines sphärischen Tetraeders (In- und Um-Kugelradius  $r, R$ , halbe Kantenlänge  $A$ , halber Winkel  $\epsilon$  eines Seitendreiecks). Spezialisieren Sie diese Anwendung der Formeln 6.1 auf die drei Tetraeder mit den pflasternden Diederwinkeln ( $2\vartheta = 120^\circ, 90^\circ, 72^\circ$ , euklidisch  $2\vartheta \sim 70.53^\circ$ ).

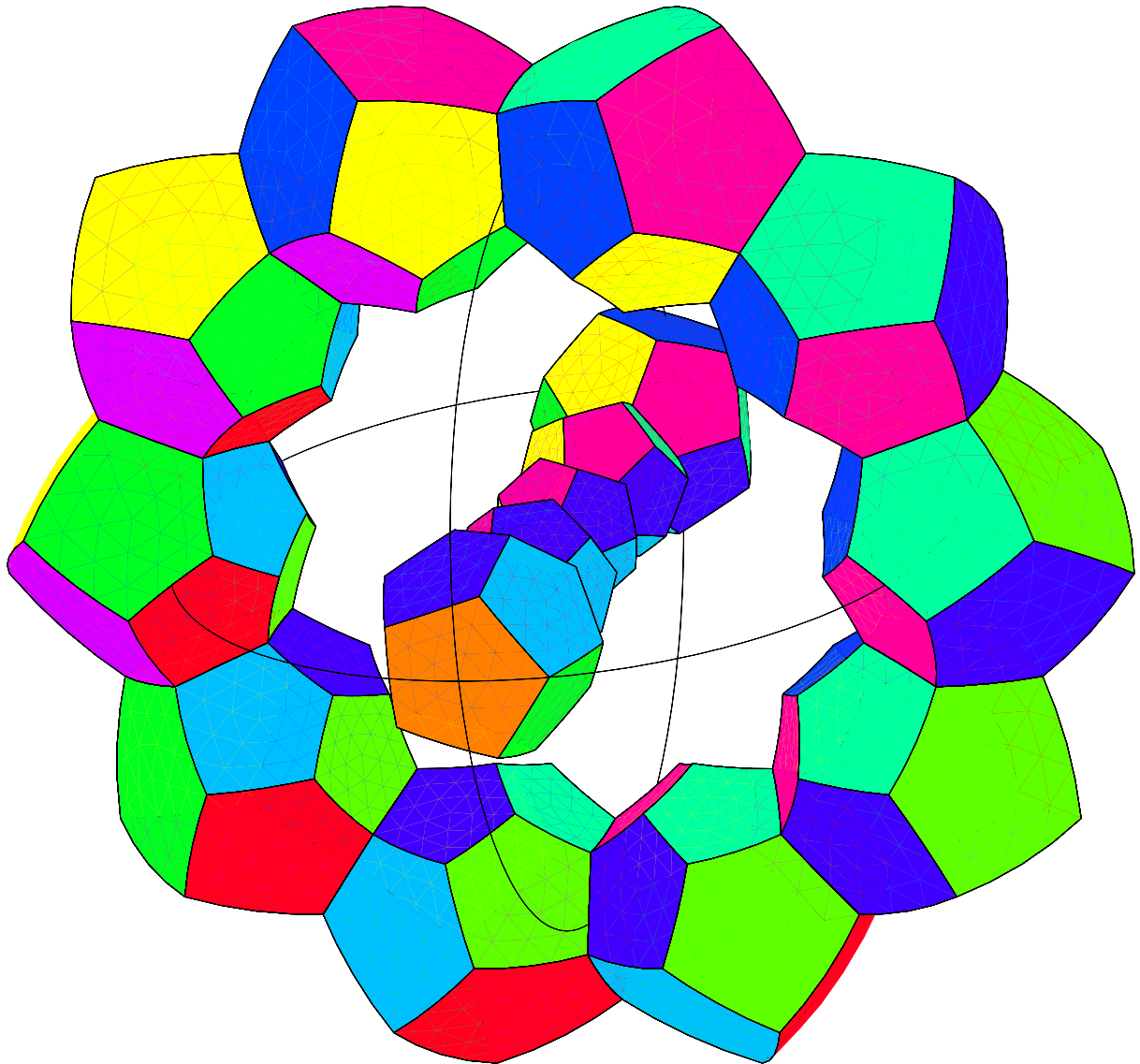
Schätzen Sie das Volumen des kleinsten dieser drei Tetraeder ab (Grundfläche  $\times$  Höhe/3).

### Aufgabe 10.3 (Doppelverhältnis und projektive Abbildungen.)

Aufg. 10.1 vorher bearbeiten.

- Es seien vier paarweise verschiedene projektive Punkte  $P_1, \dots, P_4$  auf einer projektiven Geraden gegeben. Wähle in jedem der zugehörigen 1-dim Vektorunterräume einen Basisvektor,  $v_1, \dots, v_4$ . Begründe, warum man  $v_3, v_4$  als Linearkombination von  $v_1, v_2$  schreiben kann:  $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ ,  $v_4 = c \cdot v_1 + d \cdot v_2$ . Zeige, daß das "Doppelverhältnis"  $(a/b) \cdot (d/c)$  tatsächlich von den vier Basiswahlen nicht abhängt, also ein Doppelverhältnis der vier projektiven Punkte definiert.
- Es sei  $L : V^d \rightarrow V^d$  eine injektive lineare Abbildung. Da  $L$  eindimensionale Vektorunterräume auf ebensolche abbildet, bekommt man eine Abbildung  $\hat{L} : P^{d-1}V \rightarrow P^{d-1}V$ .

Zeige, daß  $\hat{L}$  projektive Geraden (=1-dim projektive Unterräume) auf projektive Geraden abbildet. Zeige weiter, daß das Doppelverhältnis von vier paarweise verschiedenen Punkten auf einer projektiven Geraden dasselbe ist wie das ihrer Bildpunkte.



Ausschnitt der Pflasterung von  $S^3$  mit 120 Dodekaedern

Die Kreise sind Großkreise der Äquator-2-Sphäre in zwei Koordinatenebenen. Auf dem dritten Großkreis sind 10 Dodekaeder zu einem Ring aufgereiht, der Inkugelradius der  $120^\circ$  Dodekaeder war ja  $18^\circ$ .

Diese Dodekaeder sind die Dirichletzellen der 120 Quaternionen  $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$ , die durch die Abbildung  $q \rightarrow L_q$  (Aufgaben 7.3, 8.4, 9.3) auf die Elemente der Drehgruppe des Dodekaeders abgebildet werden, z.B. der Drehgruppe des abgebildeten Dodekaeders mit Mittelpunkt 0. Genauer findet man zu einem Dodekaeder der Pflasterung die zugehörige Drehung des mittleren Dodekaeders wie folgt: Die im Bild geradlinige Großkreisverbindung der Mittelpunkte ist die Drehachse, und die Länge der Großkreisverbindung ist der halbe Drehwinkel. Die beiden nächsten Nachbardodekaeder gehören also zu  $72^\circ$  Drehungen um Flächennormalen, Dodekaeder des äußeren Ringes gehören zu  $180^\circ$  Drehungen um Drehachsen durch gegenüberliegende Kantenmitten. Der Quotient (in der Gruppe  $S^3$ ) der Mittelpunkte zweier benachbarter Dodekaeder ist eine Quaternion  $q$  mit  $|\text{Im}(q)| = \sin 36^\circ$ , also einer der Mittelpunkte der zwölf Nachbarn des innersten Dodekaeders. Ein Dodekaeder, das auf dem Ring um  $36^\circ$  weiterbewegt wird, wird auch um  $36^\circ$  gedreht, vgl. Farben.

## 20.12.01

### Definition und Berechnung der Bogenlänge

Alle Argumente sollten für beliebige Normen funktionieren (und nicht nur aus Gewöhnung geglaubt werden). Ein konvexes Polygon  $P_1$  innerhalb eines konvexen Polygons  $P_2$  hat kleineren Umfang: Verlängere, nacheinander, die Kanten von  $P_1$  und schneide damit, umfangsverkleinernd (Dreiecksungleichung), Teile von  $P_2$  ab, bis das äußere Polygon auf das innere verkleinert ist. Daher kann man für beschränkte konvexe Kurven die Bogenlänge definieren als Supremum der Länge einbeschriebener (konvexer) Sehnenpolygone. Argumentation mit dem Supremum gehört zum Repertoire.

Für stetig differenzierbare Kurven  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  soll die Länge ebenfalls als Supremum der Länge von Sehnenpolygone definiert werden. Ehe man "Supremum" sagen kann, benötigt man eine obere Schranke, woher? Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die kontinuierliche Dreiecksungleichung liefern:

$$|c(t_j) - c(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{c}(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\dot{c}(t)| dt,$$

also hat man für jede Unterteilung von  $I = [a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  eine von der Unterteilung unabhängige obere Schranke:

$$\sum_{j=1}^{j=n} |c(t_j) - c(t_{j-1})| \leq \int_a^b |\dot{c}(t)| dt.$$

Aber warum gilt die kontinuierliche Dreiecksungleichung? Wegen der leichten Approximierbarkeit der Integrale stetiger Funktionen durch Riemannsummen (und der Dreiecksungleichung für Summen). Auch diese Details gehören zum Handwerkszeug.

Tatsächlich gilt in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen. Das läßt sich gut mit der Bogenlängenfunktion  $\ell : I \rightarrow \mathbb{R}$  beweisen:

$$\ell(t) := \text{Länge}(c|_{[a,t]}), \quad \text{Beh.: } \ell(t) = \int_a^t |\dot{c}(s)| ds.$$

Das kann nur wahr sein, wenn die Bogenlängenfunktion  $\ell$  differenzierbar ist mit der Ableitung  $\ell'(t) = |\dot{c}(t)|$ . Mit dem, was wir schon wissen, schätzen wir den Differenzenquotienten ab:

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot |c(t + \Delta t) - c(t)| \leq \frac{1}{\Delta t} \cdot |\ell(t + \Delta t) - \ell(t)| \leq \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} |\dot{c}(s)| ds$$

Die beiden äußeren Terme haben für  $\Delta t \rightarrow 0$  den Grenzwert  $|\dot{c}(t)|$ , also auch der mittlere Term!! Weil  $t \mapsto |\dot{c}(t)|$  stetig ist, folgt:  $\ell(t) = \int_a^t |\dot{c}(s)| ds$ , wie behauptet.

Ich habe mit dieser langsamen Wiederholung eine ganze Vorlesung zugebracht, weil ich diese Argumentationen wirklich von jedem erwarte.

### 8.1.02

Einfache Konstruktionen mit Kurven. Gefragt ist vor allem die Beschreibung.

1.) Rollkurven, beschreibe ein Rad, das auf einer horizontalen Geraden abrollt.

Die Translationsbewegung des Mittelpunktes und die Rotation des Kreise vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt werden überlagert. Wir erhalten eine Zykloide:

$$Z(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega t - r \sin \omega t \\ -r \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \dot{Z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega - r\omega \cos \omega t \\ +r\omega \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Diese differenzierbare Kurve hat an den Stellen  $t = 2\pi/\omega$ , an denen die Geschwindigkeit 0 ist, Spitzen. Diese Spitzen besitzen vertikale Tangenten wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{x}(t)/\dot{y}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \tan(\omega t/2) = 0.$$

Das Bogenlängenintegral ist ausnahmsweise explizit berechenbar:

$$\int_0^T |\dot{Z}(t)| dt = \int_0^T 2r\omega \sin(\omega t/2) dt = 4r(1 - \cos(\omega T/2)).$$

2.) Fadenevolventen, wickele einen Faden der Länge  $4r$  von der Zykloide ab.

Wegen  $\dot{Z}(t)/|\dot{Z}(t)| = \begin{pmatrix} \sin(\omega t/2) \\ \cos(\omega t/2) \end{pmatrix}$  erhält man wieder eine Zykloide:

$$Z(t) + \dot{Z}(t)/|\dot{Z}(t)| \cdot (4r - \int_0^T |\dot{Z}(t)| dt) = \begin{pmatrix} r\omega t + r \sin(\omega t) \\ -2r - r \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

3.) Epi- und Hypo-Zykloiden, Kreise rollen auf Kreisen ab, Blatt 11.

Überlagerung von zwei Kreisbewegungen:

$$c(t) = R \exp(it) + r \exp(int), \quad \dot{c}(t) = i \exp(-it)(R + rn \exp(i(n-1)t)).$$

Eine Interpretation als "abrollen" erfordert, daß  $\dot{c}(t)$  null sein kann, also  $r = R/n$  und  $t = \pi/(n-1)$  (oder  $t = 0$  bei negativem  $n$ ). Abrollradius =  $R \cdot (1 - 1/n)$ .

Beschreibt man die Bewegung der um die Sonne kreisenden Planeten von der Erde aus, so erhält man derartige Epizykloiden.

4.) Schleppkurven, ein zunächst bei  $(L, 0)$  ruhender Punkt wird an einem gespannten Faden gezogen, dessen Anfangspunkt sich auf der  $y$ -Achse bewegt.

1.) Ansatz der Schleppkurve als Graph,  $c(x) := (x, f(x))$ ,  $c'(x) = (1, f'(x))$ .

Die Tangente  $T_x(t) = c(x) - c'(x) \cdot t$  trifft die  $y$ -Achse bei  $t = x$ . Dabei hat der Tangentenabschnitt die Länge  $L$ ,  $L^2 = x^2 + f'(x)^2 x^2$ . Es folgt  $f(x) = \int_L^x -\sqrt{L^2/x^2 - 1} dx$ .

2.) Ansatz der Schleppkurve nach der Bogenlänge parametrisiert,  $c(t) = (u(t), v(t))$ ,  $\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2 = 1$ ,  $u(0) = L, v(0) = 0$ . Die Schleppbedingung lautet  $c(t) + \dot{c}(t) \cdot L = (0, y(t))$ , liefert also  $\dot{u}(t)/u(t) = -1/L$ ,  $u(t) = L \cdot \exp(-t/L)$ ,  $\dot{v}(t) = \sqrt{1 - \exp(-2t/L)}$ ,  $v(t) = \int_0^t \dot{v}(\tau) d\tau$ .

### 10.1.02

Flächeninhalte.

Das Bogenlängenintegral  $\text{Länge}(c) = \int |\dot{c}(t)| dt$  interpretieren wir so: Die Länge erhält man durch Integration (über das Parameterintervall) der punktwweisen Längenverzerrung  $|\dot{c}(t)|$ . Dies dehnen wir auf Flächeninhalte aus, jedoch ohne daß in dieser Vorlesung eine Definition



des Flächeninhalts vorhergeht (vgl. Vorlesung Lieb). Wir berechnen also Flächeninhalte von Bildern unter stetig differenzierbaren Abbildungen  $F$  als Doppelintegrale der punktweisen Flächenverzerrung von  $F$ , also von  $\det(\text{Jacobi}(F))$ . Zum Ausgleich für die Nichtbehandlung der Definition bespreche ich drei Beispiele, in denen eine alternative elementare Berechnung dasselbe Ergebnis liefert wie das Integral. Diese Beispiele können auch als Illustrationen zum Transformationssatz für zweidimensionale Integrale angesehen werden.

1.) Ebene Polarkoordinaten,  $F(r, \varphi) := (r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ . Die Spaltenvektoren der Jacobimatrix sind  $\partial F/\partial r = (\cos \varphi; \sin \varphi)$  und  $\partial F/\partial \varphi = (-r \sin \varphi; r \cos \varphi)$ . Diese Vektoren sind orthogonal und haben die Längen 1 bzw.  $r$ , ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta r, \Delta \varphi$  wird also auf ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta r, r \cdot \Delta \varphi$  abgebildet. Die Flächenverzerrung von  $\text{Jacobi}(F)$  ist also  $r$ , und der durch  $\int_{r_0}^{r_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \, dr \, d\varphi = 0.5(r_1^2 - r_0^2)(\varphi_1 - \varphi_0)$  berechnete Inhalt stimmt mit der Differenz der Fläche von zwei Kreissektoren überein.

2.) Sphärische Polarkoordinaten,  $F(r, \varphi) := (\sin r \cos \varphi; \sin r \sin \varphi; \cos r)$ . Die Spaltenvektoren der Jacobimatrix sind

$\partial F/\partial r = (\cos r \cos \varphi; \cos r \sin \varphi; -\sin r)$  und  $\partial F/\partial \varphi = (-\sin r \sin \varphi; \sin r \cos \varphi; 0)$ . Diese Vektoren sind orthogonal und haben die Längen 1 bzw.  $\sin r$ , ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta r, \Delta \varphi$  wird also auf ein Rechteck mit den Seitenlängen  $\Delta r, \sin r \cdot \Delta \varphi$  abgebildet. Die Flächenverzerrung von  $\text{Jacobi}(F)$  ist also  $\sin r$  und deren Integral

$$\int_{r_0}^{r_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin r \, dr \, d\varphi = (\cos r_0 - \cos r_1)(\varphi_1 - \varphi_0)$$

ergibt für  $r_0 = 0, r_1 = \pi/2$  den bekannten Inhalt spezieller rechtwinkliger Dreiecke.

Für  $r_0 = 0, r_1 < \pi/2$  berechnen wir den Inhalt eines Breitenkreises durch Approximation mit regelmäßigen  $n$ -Ecken als  $2n$  mal dem Inhalt eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse  $r$  und den Winkeln  $\pi/2, \pi/n, \beta$  wobei nach Aufgabe 6.1 gilt  $\cos r = \cot(\pi/n) \cot(\beta)$ . Euklidisch haben wir  $1 = \cot(\pi/n) \cot(\beta_E)$  und  $2n(\beta - \beta_E)$  ist die Fläche des sphärischen  $n$ -Ecks. Wir subtrahieren die beiden Dreiecksformeln:

$1 - \cos r = \cot(\pi/n)(\cot(\beta_E) - \cot(\beta))$  und benutzen  $\cot' = -1 - \cot^2$ , sowie  $\cot(\beta_E) = \tan(\pi/n)$ , also

$$(\beta - \beta_E)(1 + \cot(\pi/2)^2) \leq (\cot(\beta_E) - \cot(\beta)) \leq (\beta - \beta_E)(1 + \tan(\pi/n)^2).$$

Das liefert

$$\frac{(1 - \cos r)2n \tan(\pi/n)}{1 + \tan(\pi/n)^2} \leq 2n(\beta - \beta_E) \leq (1 - \cos r)2n \tan(\pi/n)$$

und damit auch den aus dem Integral der Flächenverzerrung berechneten Wert  $(1 - \cos r)2\pi$ .

3.) Von Fahrstrahlen überstrichene Flächeninhalte. Zu einer (z.B. konvexen) Kurve  $c$  mit 0 im Innern definiere einerseits  $F(r, t) := r \cdot c(t)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . Das Integral der Flächenverzerrung von  $F$ , also  $\int_{r=0}^{r=1} \int_{t_0}^{t_1} r \cdot \det(c(t), \dot{c}(t)) \, dr \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \det(c(t), \dot{c}(t))/2 \, dt$ , wird durch Summen über Dreiecksflächen, also  $\det(c(t), c(t + \Delta t) - c(t))/2 \sim \det(c(t), \dot{c}(t))/2 \cdot \Delta t$  approximiert. Daher wird auch hier der durch Dreiecksapproximation ermittelte Flächeninhalt durch das Integral der Flächenverzerrung berechnet.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 11.1 (Bogenlänge von Funktionsgraphen)

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kann auch als parametrisierte Kurve  $x \mapsto c(x) := (x, f(x))$  angesehen werden. Wählen Sie eine Anfangsstelle  $x_0$  und spezialisieren Sie das Bogenlängenintegral auf diese Situation:  $L(x) := \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

- Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion  $L : x \mapsto L(x)$  an und berechnen Sie daraus die erste und zweite Ableitung der Umkehrfunktion  $L^{-1}$  von  $L$ .
- Definieren Sie eine Funktion  $X : \ell \rightarrow X(\ell)$ , so daß die Kurve  $\ell \rightarrow \hat{c}(\ell) := c(X(\ell))$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist, d.h.  $|\hat{c}'(\ell)| = 1$ .

### Aufgabe 11.2 (Hängende Seile, Kettenlinie)

Ein an beiden Enden aufgehängtes Seil (Wäscheleine, Absperrkette) hat folgende Eigenschaften: Jede Stelle des Seils trägt das Gewicht des darunter hängenden Teils des Seils (bis zum tiefsten Punkt); weil das Seil nur Kräfte in Richtung des Seils ausüben kann, hat diese immer tangentielle Seilkraft eine konstante horizontale Komponente und eine das Seilgewicht tragende vertikale Komponente.

- Zeige für die Kurve  $t \mapsto K(t) := (t, \cosh(t))$  ("Kettenlinie"), daß die Bogenlänge (von der tiefsten Stelle,  $t = 0$ , an) gleich der Vertikalkomponente von  $\dot{K}(t)$  ist.
- Drücke die im Einleitungstext formulierte Eigenschaft als Differentialgleichung (für eine wie in 11.1 als Graph gegebene Kurve) aus und verifiziere, daß die Kettenlinie diese Differentialgleichung löst.

### Aufgabe 11.3 (Abwicklung von Kurven, Evolventen.)

Stellen Sie sich eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $|c'(s)| = 1$  als Faden vor. Die Evolvente  $E_c$  von  $c$  (zum Anfangspunkt  $s = 0$ ) hat die Eigenschaft, daß der Punkt  $E_c(s)$  auf dem rückwärtigen Teilstück der Tangente an  $c$  im Punkt  $c(s)$  liegt und daß der Abstand zwischen  $E_c(s)$  und  $c(s)$  gleich der Bogenlänge  $s$  von  $c|_{[0,s]}$  ist.

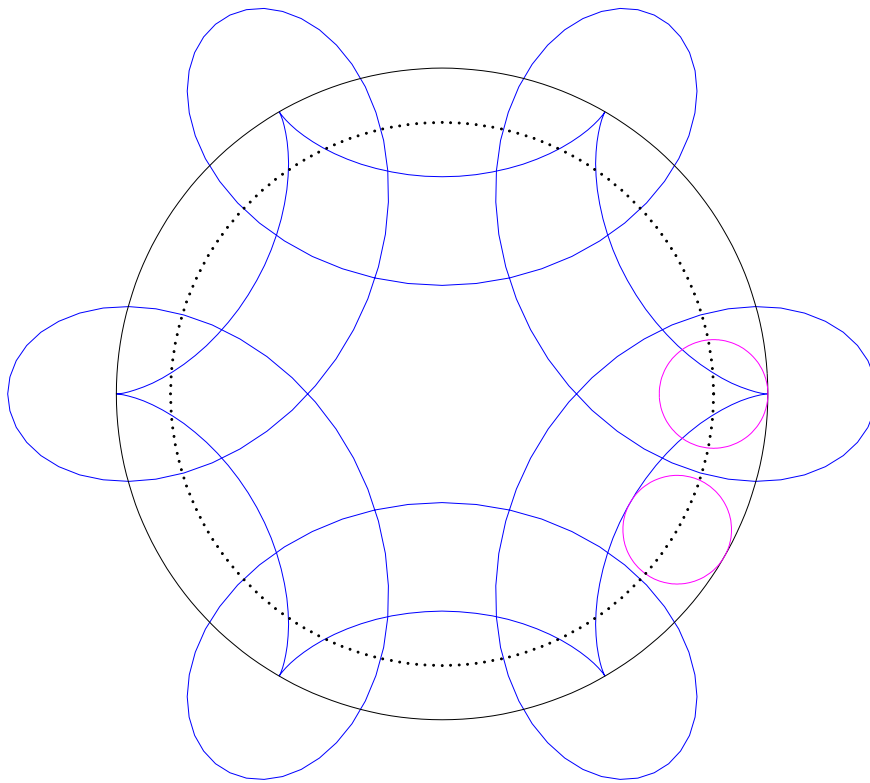
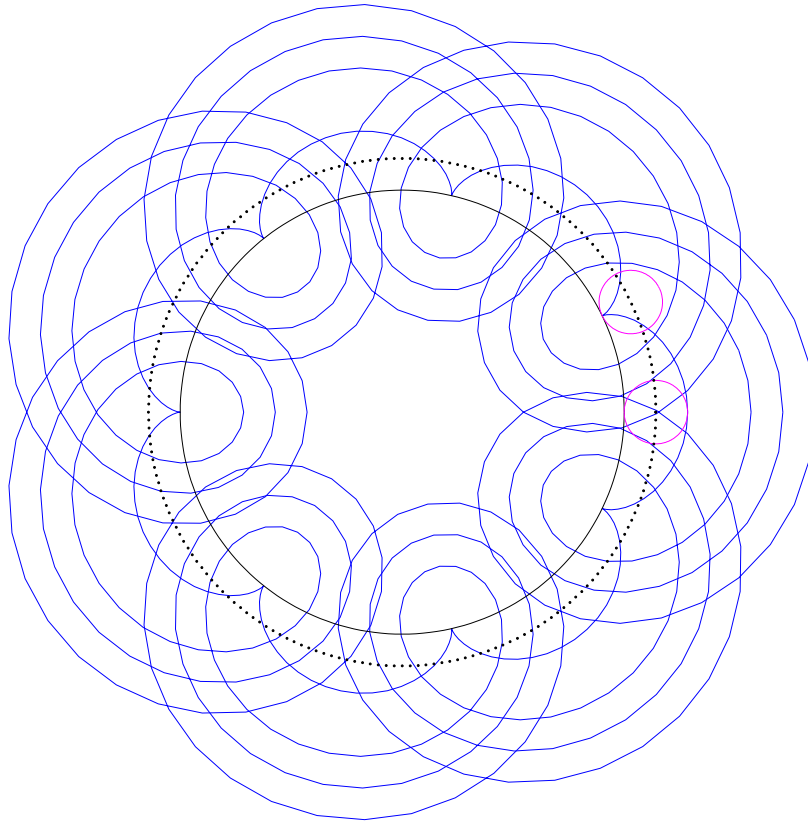
- Drücken Sie die Text-Definition der Evolvente durch eine Formel  $E_c(s) := ??$  aus.
- Verifizieren Sie für die Evolvente eines Kreises, daß die Tangente der Evolvente senkrecht auf der zugehörigen Kreistangente ist.

### Aufgabe 11.4 (Das zweite Keplersche Gesetz. (Wird fortgesetzt) )

Voraussetzung: Aus physikalischen Gründen gelte für eine Kurve in  $\mathbb{R}^3$ , daß an jeder Stelle  $c(s)$  und  $c''(s)$  proportional sind (Bezeichnung: "Zentralkraft").

- Zeige, daß die Vektorfunktion  $D(s) := c(s) \times c'(s)$  konstant ist.
- Zeige, daß die Kurve  $c$  in der Ebene  $E_0 := \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, D(0) \rangle = 0\}$  liegt.
- Zeige, daß  $|a \times b|/2$ , ( $a, b \in \mathbb{R}^3$ ) der Flächeninhalt des Dreiecks  $(0, a, b) \subset \mathbb{R}^3$  ist.

Um  $a \times b$  zu definieren, betrachte für  $a, b, x \in \mathbb{R}^3$  die lineare Abbildung  $x \mapsto \det(a, b, x) \in \mathbb{R}$  und definiere  $a \times b$  als den Vektor, der diese lineare Abbildung als Skalarprodukt repräsentiert:  $\det(a, b, x) = \langle a \times b, x \rangle$ . Hieraus folgt  $a \times b \perp a, b$  und für linear unabhängige  $a, b$  hat man:  $\det(a, b, a \times b) = |a \times b|^2 > 0$ , insbesondere  $e_1 \times e_2 = e_3$ .



Rollkurven mit  $n = +8$  und  $n = -5$ .  $c(t) = R \exp(i \cdot t) + r \exp(i \cdot nt)$

Falls  $n$  negativ ist, wird der zweite Kreis in umgekehrter Richtung wie der erste umlaufen.  
(Mondbahn, im Sonnensystem:  $n \sim 12$ ,  $r : R \sim (0.38 \cdot 10^6) : (150 \cdot 10^6)$ .)

### 15.1.02

Die Beispiele (10.1.) zum Flächeninhalt wurden um zwei 3-dimensionale Beispiele ergänzt,

a) Volumen in sphärischen Polarkoordinaten,  $F(r, \vartheta, \varphi) := r \cdot (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$  und b) Volumen der Sphäre  $\mathbb{S}^3$ , die beschrieben wird als Bild unter der Abbildung  $F(\alpha, \vartheta, \varphi) := (\cos \alpha \cdot (\cos \vartheta, \sin \vartheta), \sin \alpha \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi))$ .

In beiden Fällen wird zuerst die Jacobimatrix  $Jacobi(F)$  berechnet, diese hat drei paarweise orthogonale Spaltenvektoren, nämlich die drei partiellen Ableitungen von  $F$ . Daher bildet  $Jacobi(F)$  achsenparallele Quader aus dem Definitionsbereich ab auf Quader, deren Kanten parallel zu den Spaltenvektoren von  $Jacobi(F)$  sind. Das Verhältnis der Volumina von Bildquader zu Urbildquader ist das Produkt der Längen der drei Spaltenvektoren von  $Jacobi(F)$ . Zum Vergleich mit der Linearen Algebra: Diese Volumenverzerrung ist im Fall a) auch:  $\det(Jacobi(F))$  und in beiden Fällen:  $\sqrt{\det(Jacobi(F)^{trans} \cdot Jacobi(F))}$ .

Im Fall a) finden wir so für das (vermutlich bekannte) Volumen von Kugelschalen:

$$V = \int_{r_0}^{r_1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta \, dr d\vartheta d\varphi = 4\pi/3(r_1^3 - r_0^3).$$

Im Fall b) finden wir so für das Volumen der 3-Sphäre:

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha d\vartheta d\varphi = 4\pi^2 \int_0^{\pi/2} (0.5 \sin^2(\alpha))' \, d\alpha = 2\pi^2.$$

Andererseits, zu der 120 Dodekaederpflasterung von  $\mathbb{S}^3$  berechnen wir das Volumen eines Dodekaeders mit Hilfe der 12 Pyramiden vom Mittelpunkt aus. Die Höhe dieser Pyramiden ist der Inkugelradius der Dodekaeder, also  $18^\circ = \pi/10$ ; deren Volumen berechnen wir versuchsweise euklidisch, als Grundfläche  $\times$  Höhe/3. Die Grundfläche ist ein sphärisches 5-Eck, dessen Winkel mit  $2 \cdot 54,73561^\circ$  um  $2 \cdot 0,73561/180 \cdot \pi$  größer sind als im euklidischen regulären 5-Eck. Das sphärische 5-Eck hat daher den Flächeninhalt  $0,73561\pi/18$ , und das Gesamtvolumen aller Pyramiden ergibt sich zu

$V(\mathbb{S}^3) \sim 120 \cdot 12 \cdot 0,73561\pi/18 \cdot \pi/30 = 1,96\pi^2$ , d.h. 2% zu klein. Die Dodekaeder sind also so klein, daß sie schon ziemlich gut mit euklidischen Volumenformeln behandelt werden können.

Damit sind die Erläuterungen zu Flächen- und Volumenberechnungen durch Integration der Jacobi-Determinante beendet.

Die Berechnung vom Ende der letzten Stunde (der vom "Fahrstrahl" überstrichenen Fläche) wird jetzt auf die Planetenbewegung angewandt. Eine Ellipse mit einem Brennpunkt im Nullpunkt (Sonne) ist  $c(\varphi) := (a \cos \varphi - e, b \sin \varphi)$ ,  $a^2 = b^2 + e^2$ ,  $c'(\varphi) := (-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$ , rechne nach:  $|c(\varphi)|^2 = a^2 - 2ae \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi$ ,  $|c'(\varphi)|^2 = a^2 - e^2 \cos^2 \varphi$ . Deren Flächengeschwindigkeit ist  $0.5 \det(c(\varphi), c'(\varphi)) = b(a - e \cos \varphi) = b|c(\varphi)|$ . Das zweite Keplersche Gesetz sagt, daß die Planeten mit konstanter Flächengeschwindigkeit ihre Bahn ziehen. Wir benutzen daher die Umkehrfunktion  $F^{-1}$  der Flächenfunktion  $F(\varphi) := \int_0^\varphi b(a - e \cos \sigma) d\sigma$  zur Reparametrisierung, erhalten also die Keplerbahnen als  $k(t) := c(F^{-1}(t))$ .

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 12.1 (Ellipsen, Hyperbeln, komplexe Zahlen.)

Betrachte die konzentrischen Kreise  $t \rightarrow z = R \cdot \exp(it) \subset \mathbb{C}$  und ihre Radien  $R \rightarrow z = R \cdot \exp(it)$ . Zeige, daß durch  $z \rightarrow w = z + 1/z$  die Kreise in Ellipsen, die Radien in dazu orthogonale Hyperbeln abgebildet werden. Gib quadratische Gleichungen für die Bildkurven an und bestimme ihre Brennpunkte.

Zeige weiter, daß durch  $w \rightarrow w^2$  diese Ellipsen in neue Ellipsen mit einem Brennpunkt in 0 abgebildet werden und Paare von Hyperbeln wieder auf zu den neuen Ellipsen orthogonale Hyperbeln.

### Aufgabe 12.2 (Tangentensegmente der Astroide.)

- Zeige, daß die Rollkurve  $x(t) + i \cdot y(t) := \exp(it) + \frac{1}{3} \cdot \exp(-3it)$  die Gleichung  $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = \text{const}$  erfüllt.
- Zeige, daß die Tangentenabschnitte zwischen den Koordinatenachsen alle dieselbe Länge haben. (Eine unter verschiedenen Winkeln von einem horizontalen Hof an eine vertikale Wand gelehnte Leiter ist also tangential an immer dieselbe Astroide.)

### Aufgabe 12.3 (Wieder Kreise.)

Gegeben sei ein mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufener Kreis

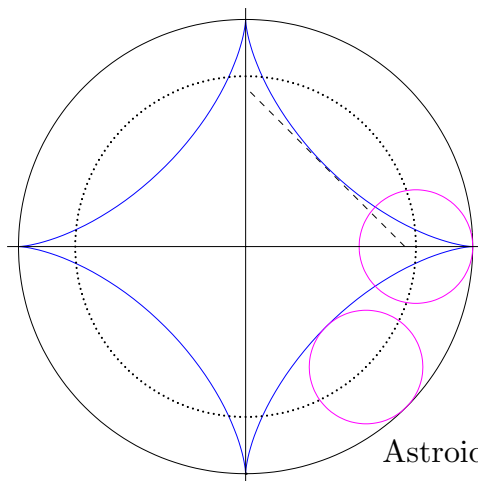
$$t \rightarrow c(t) := (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)).$$

Berechne die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und den Radius  $R$  aus  $|c'(0)|$  und  $|c''(0)|$ .

Umgekehrt seien zwei orthogonale Vektoren  $0 \neq v, b \in \mathbb{R}^2$  gegeben. Gib den Kreis  $t \rightarrow c(t)$  an mit  $c(0) = p \in \mathbb{R}^2$ ,  $c'(0) = v$ ,  $c''(0) = b$ .

### Aufgabe 12.4 (Die Keplerschen Gesetze. (Fortsetzung von 11.4) )

Parametrisiere eine Ellipse nach Kepler so, daß die Flächengeschwindigkeit  $\frac{1}{2} \det(k(t), k'(t))$  (in Bezug auf einen Brennpunkt) konstant ist. Rechne nach, daß dann die Beschleunigung  $k''(t)$  proportional zu  $-k(t)/|k(t)|^3$  ist (Newtonsches Gravitationsgesetz).



Astroide, mit Rollkreisen und Tangentenabschnitt, zu 12.2.

Konfokale Kegelschnitte, zu 12.1

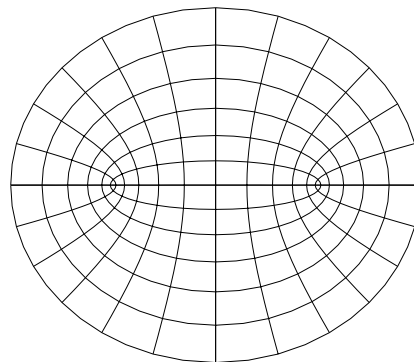
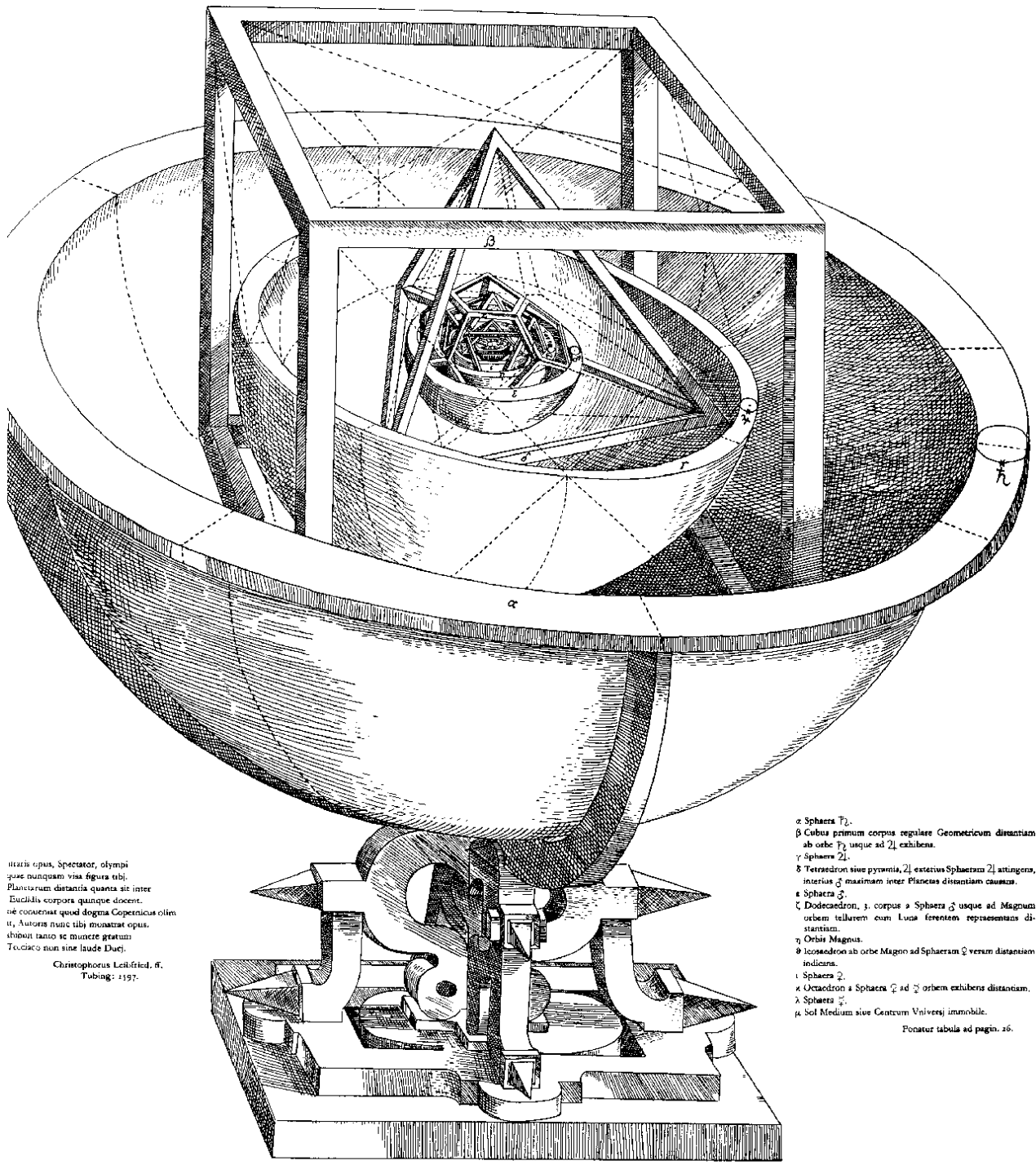


TABELLA III.  
ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.



utris opus, Spectator, olympi  
quae nunquam visa figura tibi.  
Plancturum distantia quanta sit inter  
Euclidis corpora quinque docent.  
ne concouerat quod dogma Copernicus olim  
ii. Auspex tunc tibi monstrat opus.  
dubius tanto se munere gratum  
Tellico non sine laude Ducit.

Christophorus Leitfried, ff.  
Tubing: 1597.

- α Sphaera 7.
  - β Cubus primum corpus regulare Geometricum distantiam ab orbe 7 usque ad 21 exhibens.
  - γ Sphaera 21.
  - δ Tetraedron sive pyramis, 21 exterior Sphaeram 21 attingens, interior 3 maximam inter Planctus distantiam cauetur.
  - ε Sphaera 3.
  - ζ Dodecaedron, 3 corpus 3 Sphaera 3 usque ad Magnam orbem tellurem cum Luna ferentem representans distantiam.
  - η Orbis Magnus.
  - θ Icosaedron ab orbe Magni ad Sphaeram 3 versus distantiam indicans.
  - ι Sphaera 3.
  - κ Tetraedron 3 Sphaera 3 ad 7 orbem exhibens distantiam.
  - λ Sphaera 7.
  - μ Sol Medium sive Centrum Universi immobile.
- Fonatur tabula ad pagin. 26.

In- und Umkugeln Platonischer Körper und planetare Abstände nach Kepler.

### 17.1.02

Weitere Erläuterungen zur Flächenformel  $\int_0^T 0.5 \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$  und zur Ableitung der Umkehrfunktion  $\frac{d}{dt} F^{-1}(t) = 1/F'(F^{-1}(t))$ . Damit wird verifiziert, daß die Flächengeschwindigkeit von  $k(t)$  wirklich konstant ist. Hieraus folgt mit der Produktregel:

$$0 = \frac{d}{dt} \det(k(t), \dot{k}(t))/2 = \det(\dot{k}(t), \dot{k}(t)) + \det(k(t), \ddot{k}(t)) = \det(k(t), \ddot{k}(t)).$$

Daher sind  $k(t)$  und  $\ddot{k}(t)$  proportional, man spricht von einer ‘‘Zentralkraft’’, die diese zu  $k(t)$  proportionale Beschleunigung bewirkt. Um den Betrag dieser Zentralkraft zu verstehen, berechnen wir:

$$\frac{1}{2} \langle \dot{k}(t), \dot{k}(t) \rangle = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{a + e \cos \varphi}{a - e \cos \varphi} = \frac{-2}{b^2} + \frac{4a}{b^2} \frac{1}{a - e \cos \varphi(F^{-1}(t))} = \frac{-2}{b^2} + \frac{4a}{b^2} \frac{1}{\langle k(t), k(t) \rangle^{0.5}}.$$

Diese Formel heißt in der Physik ‘‘Energiesatz im Planetensystem’’. Wir differenzieren:

$$\langle \dot{k}(t), \ddot{k}(t) \rangle = -\frac{4a}{b^2} \frac{\langle \dot{k}(t), k(t) \rangle}{|k(t)|^3}, \quad \text{oder falls nicht } \dot{k}(t) \perp k(t) \text{ so } \ddot{k}(t) = \text{const} \cdot \frac{-k(t)}{|k(t)|^3}.$$

Natürlich will man dies Newtonsche Gravitationsgesetz ohne die ad hoc Voraussetzung  $\dot{k}(t) \perp k(t)$  herleiten, in Aufg. 12.4.

Unbefriedigend ist noch, daß wegen  $0.5 \det(k(t), \dot{k}(t)) = 1$  die Umlaufzeit jedes Planeten als Flächeninhalt  $\pi ab$  seiner Bahnellipse normiert ist. Wie die Uhren auf allen Planeten gleich geeicht werden können, zeigt der Energiesatz: dividiere durch  $4a/b^2$ , so daß die Ortsfunktion  $1/|k(t)|$  nicht mehr mit einer von den Bahndaten abhängigen Konstanten multipliziert wird! Dann wähle als neue Zeit  $\tau = t \cdot \sqrt{4a/b^2}$ . Dadurch wird in Übereinstimmung mit der Physik die Gesamtenergie abhängig von der großen (statt wie eben der kleinen) Bahnachse und die  $\tau$ -Umlaufzeit wird  $4\pi a^{3/2}$ , wie es im dritten Keplerschen Gesetz entdeckt worden ist.

$$\text{Energiesatz:} \quad \frac{1}{2} \langle (k'(\tau), k'(\tau)) \rangle - \frac{1}{|k(t)|} = \frac{-1}{2a}.$$

Bitte üben Sie die hierin enthaltenen Anwendungen der Produkt- und Kettenregeln und beachten Sie, wie elegant die Umkehrfunktion  $F^{-1}(t)$  des Flächenintegrals die vom zweiten Keplerschen Gesetz verlangte Parametrisierung der Bahnkurve erreicht,  $k(t) := c(F^{-1}(t))$ .

### 22.1.02

Behalten Sie vom letzten Mal: Ellipsen sind nicht nur in der Standardform ( $a \cos \varphi$ ,  $b \sin \varphi$ ) nützlich. Das Integral  $\int \frac{1}{2} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$  berechnet die Flächeninhalte, die vom Fahrstrahl (Radiusvektor) überstrichen werden. Umkehrfunktionen erlauben, die Parametrisierung zu wählen, mit der diese ‘‘Flächengeschwindigkeit’’ konstant ist. Die technischen Details sind Ketten- und Produktregel.

Zum Abschluß von Flächenberechnungen durch Integration der Determinante der Jacobimatrix einer beschreibenden Abbildung und zur Wiederholung der zweidimensionalen sphärischen Geometrie berechnen wir den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke ( $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ ) durch Integration der Flächenverzerrung ( $\sin r$ ) von sphärischen Polarkoordinaten

$$F : (r, \varphi) \mapsto (\sin r \cos \varphi, \sin r \sin \varphi, \cos r), \quad \det(\text{Jacobi}(F)|_{r,\varphi}) = \sin r.$$

Das sphärische Dreieck ( $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ) wird nun von der Ecke  $C$  aus in Polarkoordinaten  $0 \leq \varphi \leq \gamma$ ,  $0 \leq r \leq r(\varphi)$  beschrieben ( $r(\varphi)$  ist also die Länge des Großkreises von  $C$  in

Richtung  $\varphi$  bis zur gegenüberliegenden Dreiecksseite  $c$ , und das linke Teildreieck hat also die Seiten und Winkel  $(r(\varphi), b, c(\varphi), \alpha, \beta(\varphi), \varphi)$ . Der Flächeninhalt ist dann:

$$area = \int_{\varphi=0}^{\gamma} \int_{r=0}^{r(\varphi)} \sin r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\gamma} (1 - \cos r(\varphi)) \, d\varphi.$$

Der Winkelkosinussatz für das Teildreieck lautet

$$\cos \beta(\varphi) = -\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \cos b.$$

Differenzieren ergibt das wesentlichste Zwischenergebnis:

$$-\sin \beta(\varphi) \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} = +\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \cos b.$$

Nun wird der Projektionssatz

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

auf das Polardreieck mit den Seiten und Winkeln  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi - a, \pi - b, \pi - c$  angewandt und  $a, b$  vertauscht:

$$\sin \beta \cos a = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos b.$$

Dies vereinfacht den differenzierten Winkelkosinussatz zu

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = -\cos r(\varphi),$$

und das Integral ist als Stammfunktion berechenbar:  $\gamma + \beta(\gamma) - \beta(0) = \gamma + \beta + \alpha - \pi$ , wie erwartet.

Als nächstes wenden wir uns der Definition der “Krümmung” von Kurven zu.

Kreise sollten konstante Krümmung haben, und wegen Aufgabe 12.3 kann jede zweimal differenzierbare Kurve (mit  $\dot{c}(t) \neq 0$ ) an jeder Stelle bis zur zweiten Ableitung durch einen Kreis approximiert werden, und zwar eindeutig. Diesen im Taylor-Sinne optimal approximierenden Kreis nennen wir “Krümmungskreis”, seinen Radius “Krümmungsradius”. Damit sind auch die Evoluten auf der Rückseite von Blatt 13 definiert, aber noch nicht die “Größe” von Krümmung. – Dazu soll die Winkeländerung der Tangente quantitativ gefaßt werden, zunächst für Kurven, die mit Geschwindigkeit  $|c'(t)| = 1$  parametrisiert sind. Hier bilden die Einheitsnormale  $n(t)$  und die Tangente  $c'(t)$  eine Orthonormalbasis. Wie in der Funktionentheorie heißt  $n$  “äußere” Normale falls gilt  $\text{Rot}(90^\circ) \cdot n = c'(t)$ . Um die Rotationsgeschwindigkeit dieser Basis längs der Kurve zu fassen, versuchen wir, ein paralleles Vektorfeld zu definieren als:

$$P(t) := n(t) \cos \alpha(t) - c'(t) \sin \alpha(t).$$

Dies Vektorfeld ist euklidisch parallel, wenn seine Ableitung 0 ist. Berechne:

$$P'(t) := (n'(t) - c'(t)\alpha'(t)) \cdot \cos \alpha(t) - (n(t)\alpha'(t) + c''(t)) \cdot \sin \alpha(t).$$

Wegen  $0 = \langle n, n \rangle' = 2\langle n, n' \rangle$  sind  $n, n'$  orthogonal, also  $n, c'$  proportional, ebenso  $n, c''$ . Daher ist  $P' = 0$  genau dann, wenn  $\alpha'$  die Bedingungen

$$\alpha'(t) = \langle n', c' \rangle(t), \quad \alpha'(t) = -\langle n, c'' \rangle(t)$$

erfüllt. Diese sind gleichzeitig erfüllt wegen  $0 = \langle n, c' \rangle' = \langle n', c' \rangle + \langle n, c'' \rangle$ . Mit dieser Wahl von  $\alpha(t)$  ist das Vektorfeld  $P(t)$  tatsächlich parallel, die Drehung um  $\alpha(t)$  in der Definition von  $P(\ )$  macht also die Drehung der Basis  $n, c'$  rückgängig. Wir nennen daher

$\alpha'(t)$  “Rotationsgeschwindigkeit der Normale” oder “Krümmung der Kurve”.

Diese ausführliche Diskussion drückt meine Überzeugung aus, daß die grundlegenden Definitionen einer ausführlichen Motivation bedürfen.



## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 13.1 (Krümmung von Ellipsen.)

- a) Berechnen Sie die Krümmung einer Ellipse (aber suchen Sie keine Bogenlängenparametrisierung!)
- b) Übersetzen Sie die Definition der Evolute auf der Rückseite in Formeln. Zeigen Sie, daß die beiden Durchmesser (von Spitze zu Spitze) der Evolute der Ellipse das Verhältnis  $a : b$  haben. Die Astroide, Aufg. 12.2, kommt also nur beinahe vor.)

### Aufgabe 13.2 (Evolute der Kreisevolvente.)

Verifiziere als Beispiel für den auf der Rückseite zitierten Satz:

Jeder Krümmungsradius der Kreisevolvente reicht auf seiner Normale (= Kreistangente, Aufg. 11.3 b) gerade bis zum Berührungspunkt auf demjenigen Kreis, von dem die Evolvente abgewickelt wurde.

### Aufgabe 13.3 (Krümmungsdifferentialgleichung.)

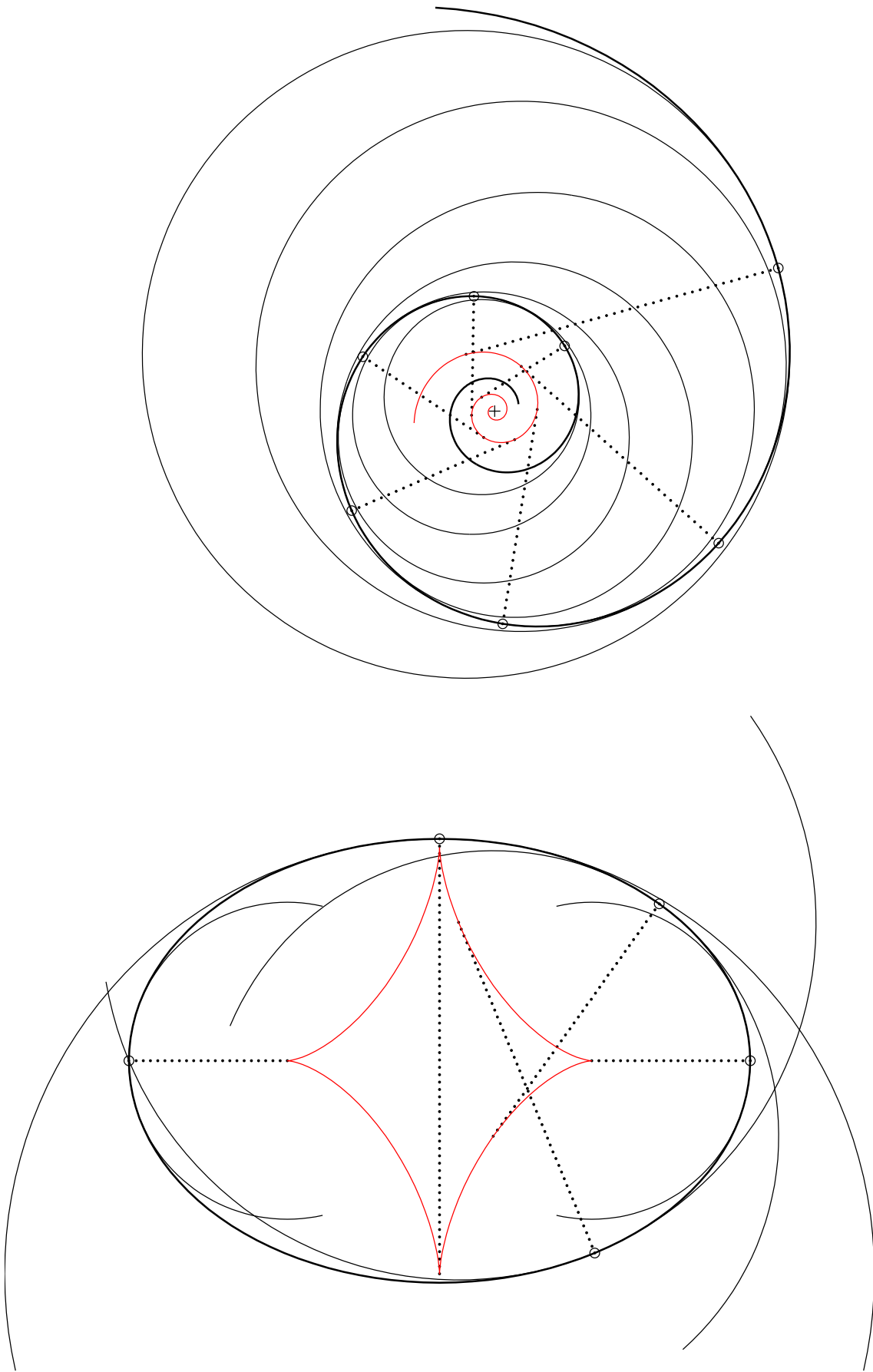
In der euklidischen Ebene sei  $\{e_1, e_2\}$  eine Orthonormalbasis und  $\text{Rot}(90^\circ)$  die  $90^\circ$ -Drehung mit  $\text{Rot}(90^\circ) \cdot e_1 = e_2$ . Ferner sei  $s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\alpha(s) := \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma$  eine Stammfunktion von  $\kappa$ .

- a) Definiere  $e(s) := e_1 \cdot \cos \alpha(s) + e_2 \cdot \sin \alpha(s)$  und zeige, daß folgende Differentialgleichung gilt:  $e'(s) = \kappa(s) \cdot \text{Rot}(90^\circ) \cdot e(s)$ .
- b) Definiere eine Kurve in  $\mathbb{R}^2$  durch  $c(s) := \int_0^s e(\sigma) d\sigma$  und zeige, daß diese Kurve die Krümmungsfunktion  $\kappa$  hat.
- c) Zeige, daß jede stetig differenzierbare Kurve  $f : s \mapsto f(s) \in \mathbb{R}^2$ , für die gilt:
 
$$f'(s) = \kappa(s) \cdot \text{Rot}(90^\circ) \cdot f(s),$$
 auf einem Kreis verläuft, also  $\langle f(s), f(s) \rangle = \text{const.}$
- d) Angenommen, man hat zwei Kurven  $f_1, f_2$  wie in c), für die außerdem gilt  $f_1(0) = f_2(0)$ . Folgere aus c) für alle  $s$ :  $f_1(s) = f_2(s)$   
Ein beliebiger Trick ist,  $f_1 - f_2$  zu untersuchen.

### Aufgabe 13.4

#### (Krümmungskreise durchsetzen i.A. ihre Kurven wie Wendetangenten.)

- a) Seien  $c_1, c_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei zweimal stetig differenzierbare Kurven und  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeige: Falls gilt  $c_1(0) = c_2(0)$ ,  $c_1'(0) = c_2'(0)$ ,  $c_1''(0) = c_2''(0)$  so stimmen auch die Kurven  $f \circ c_1$ ,  $f \circ c_2$  bei  $t = 0$  bis zur zweiten Ableitung überein, haben also dort denselben Krümmungskreis. (Produkt- und Kettenregel benutzen.)
- b) Die Abbildung  $0 \neq z \mapsto f(z) := 1/z$  bildet Kreise durch 0 auf Geraden in  $\mathbb{C}$  ab.
- c) Die Kurve  $c_2$  in a) sei Krümmungskreis der Kurve  $c_1$ , es sei  $c_1(0) \neq 0$ , aber 0 liege auf dem Krümmungskreis  $c_2$ . Nach b) ist  $f \circ c_2$  eine Gerade, die nach a) bei  $t = 0$  bis zur zweiten Ableitung mit  $f \circ c_1$  übereinstimmt. Zeige:  $f \circ c_2$  ist Wendetangente und "Krümmungskreis" von  $f \circ c_1$ .



Evoluten einer Spirale und einer Ellipse.

Die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve  $c$  heißt Evolute von  $c$ . Solange die Kurvenkrümmung  $\kappa$  streng monoton ist, ist die Evolute glatt, aber  $\kappa'(t) = 0$  bedingt Spitzen. — **Satz:** Glatte Evolutenbögen von  $c$  haben Stücke von  $c$  als Evoluten.

## 24.1.02

Wiederholung der Motivationsargumente bis zur Krümmungsdefinition und Sammlung der Formeln im Fall von Parametrisierungen mit  $|c'| = 1$ :

$$\kappa(s) = \langle n', c' \rangle(s) = -\langle n, c'' \rangle(s) = \det(c', c'')(s)$$

$$n'(s) = \kappa(s) \cdot c'(s) = \kappa(s) \cdot \text{Rot}(90^\circ)n(s), \quad c''(s) = -\kappa(s) \cdot n(s) = \kappa(s) \cdot \text{Rot}(90^\circ)c'(s).$$

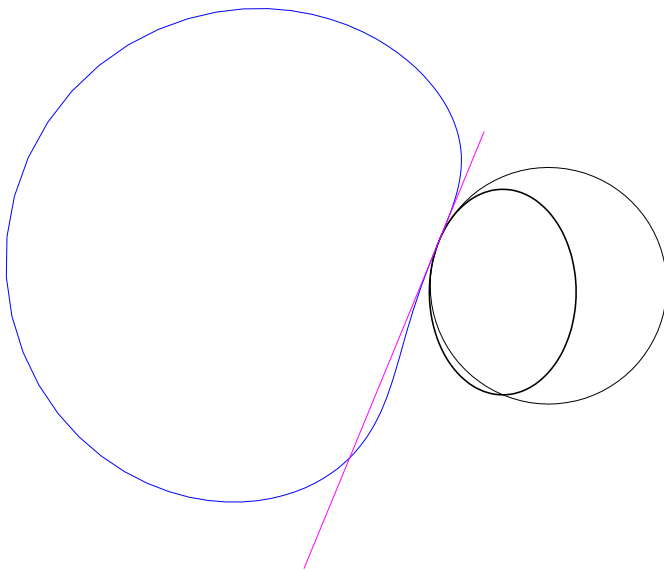
Bei gegebenem stetigen  $\kappa(s)$  ist durch diese Differentialgleichungen die Basis  $\{n(s), c'(s)\}$  eindeutig bestimmt, vgl Aufgabe 13.3. Wie erwartet erhält man für Kreise konstante Krümmung, nämlich als Funktion des Radius  $\kappa = 1/R$ . Wie Wendetangenten und quadratische Taylorpolynome durchsetzen i.a. Krümmungskreise ihre Kurven, Aufg. 13.4.

Schon Ellipsen können nicht mit Schulfunktionen nach der Bogenlänge parametrisiert werden. Daher sind zur Behandlung von *Beispielen* wie 13.1 Formeln nützlich, die nicht  $|c'| = 1$  voraussetzen (während man beim Beweis allgemeiner Sätze dies immer voraussetzen kann). Sei  $\tilde{c}(t) := c(s(t))$  mit einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren und monoton wachsenden Funktion  $t \mapsto s(t)$ . Deren Ableitung  $\frac{ds}{dt}(t) = |\frac{d}{dt}\tilde{c}(t)| =: v(t)$  nennen wir Geschwindigkeit, die äußere Normale ist  $\tilde{n}(t) := n(s(t))$  und auch bei der Krümmung deuten wir die Parameteränderung an:  $\tilde{\kappa}(t) := \kappa(s(t))$ . Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\tilde{n}(t) = \tilde{\kappa}(t) \cdot \frac{d}{dt}\tilde{c}(t) \quad \text{und} \quad \det\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}, \frac{d^2}{dt^2}\tilde{c}\right)(t) = \tilde{\kappa}(t) \cdot v(t)^3.$$

Für den als Graph (rechtsherum) parametrisierten oberen Halbkreis  $t \mapsto \tilde{c}(t) := (t, \sqrt{1-t^2})$  ergibt sich:  $v(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ ,  $\det\left(\frac{d}{dt}\tilde{c}, \frac{d^2}{dt^2}\tilde{c}\right)(t) = -1 \cdot v(t)^3$ ,  $\tilde{\kappa}(t) = -1$ .

Zur Behandlung von Evolventen unterscheiden wir die *abwickelnden*, mit der rückwärtigen Halbtangente beschriebenen Evolventen  $s_0 \leq s$ ,  $E_c(s) := c(s) - (s - s_0) \cdot c'(s)$ , und die *aufwickelnden*, mit der vorderen Hälfte der Tangente beschriebenen Evolventen  $s \leq s_1$ ,  $E_c(s) := c(s) + (s_1 - s) \cdot c'(s)$ . Zum Beispiel im ersten Fall finden wir  $E'_c(s) = c'(s) - c'(s) - (s - s_0) \cdot c''(s)$ , so daß  $\pm c'$  ein Einheitsvektorfeld senkrecht zu  $E'_c$  ist. Die abwickelnde Evolvente einer *positiv* gekrümmten Kurve  $c$  hat  $N(s) := -c'$  als äußeres Normalenfeld. Daher ist  $N'(s) = 1/(s - s_0) \cdot E'_c(s)$  und der Krümmungsradius der Evolvente ist  $(s - s_0)$ , also gerade das Stück auf der Normale von  $E_c$  (=Tangente von  $c$ ) bis zum Berührungspunkt auf  $c$ .



Mit Inversionen kann man aus Krümmungskreisen Wendetangenten machen. Hier wird eine Ellipse und einer ihrer Krümmungskreise abgebildet. Das Zentrum der Inversion wird auf dem Krümmungskreis gewählt, und zwar dem Berührungspunkt gegenüber.

Wendetangenten approximieren mindestens bis zur zweiten Ableitung, daher sind sie entartete Krümmungskreise.

## Geometrie für Lehramt

### Aufgabe 14.1 (Krümmung von Astroiden.)

- a) Berechnen Sie die Krümmung einer Astroide aus der richtigen Formel:

$$x(t) + i \cdot y(t) := \exp(it) + \frac{1}{3} \cdot \exp(-3it)$$

Bleibt die Krümmung in der Nähe der Spitzen beschränkt?

- b) Die Evolute einer ersten Astroide ist eine größere, um  $45^\circ$  gedrehte zweite Astroide. Warum genügt es zum Beweis, die Länge der *Normalenabschnitte* der ersten Astroide zwischen den Winkelhalbierenden von  $x$ - und  $y$ -Achse auszurechnen? Tun Sie das.

### Aufgabe 14.2 (Tangentiales Rutschen von Kreisevolventen-Zahnradern.)

Gestaltet man, wie auf der Rückseite, die Flanken von Zahnradern als Kreisevolventen, so rückt beim Rotieren jede Zahnflanke in eine *Parallelkurve* vor. Anders ausgedrückt, in Richtung senkrecht zu den Zahnradflanken bewegen sich die Flanken mit der Normalgeschwindigkeit  $r\omega$  ( $r$  der Radius des kleineren Kreises,  $\omega$  seine Winkelgeschwindigkeit). Dies hat die für schwere Zahnradern entscheidende Folge, daß sich beide mit *konstanter* Winkelgeschwindigkeit drehen können (Verhältnis  $r : R$ ). Allerdings rutschen dabei die Flanken aufeinander:

- a) Berechnen Sie die Tangentialgeschwindigkeiten von Punkten der Zahnflanken, mit verschiedenen Abständen  $r + \Delta r$  von der Achse .

### Aufgabe 14.3 (Fehlerwachstum bei Differentialgleichungen.)

Da Differentialgleichungen bei allen Verbindungen von Geometrie und Analysis eine wichtige Rolle spielen, bearbeiten Sie bitte folgende Differentiationsübung:

$X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei etwas besser als stetig, nämlich:  $x, y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |X(y) - X(x)| \leq L|x - y|$  ("Lipschitz stetig").

Außerdem seien  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei Kurven, für die gilt:  $c'_j(t) = X(c_j(t))$  ("Zwei Lösungen derselben Differentialgleichung").

- a) Zeigen Sie: Die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $h(t) := \langle (c_1 - c_2)(t), (c_1 - c_2)(t) \rangle \cdot \exp(-2L \cdot t)$  ist schwach fallend.
- b) Folgern Sie  $|c_1 - c_2|(t) \leq |c_1 - c_2|(0) \exp(L \cdot t)$  ("Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten  $c_1(0), c_2(0)$ ").

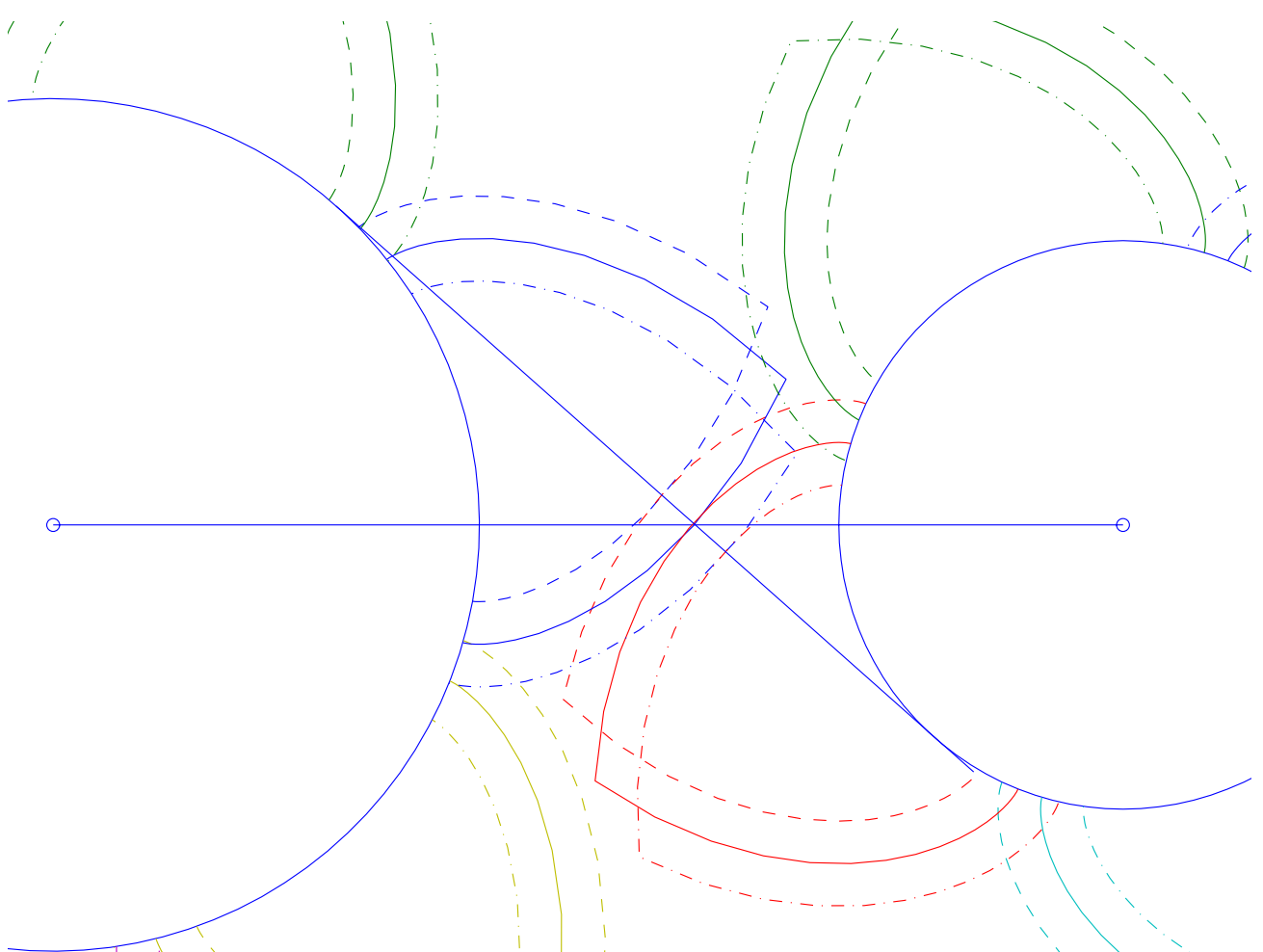
### Aufgabe 14.4 (Drehungen in $\mathbb{R}^3$ .)

Da Sie hartnäckig glauben, Matrizen seien einfacher als Quaternionen, bestimmen Sie die Matrix der (Links-)Drehung des  $\mathbb{R}^3$  mit der Achse  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}$  und mit dem Drehwinkel

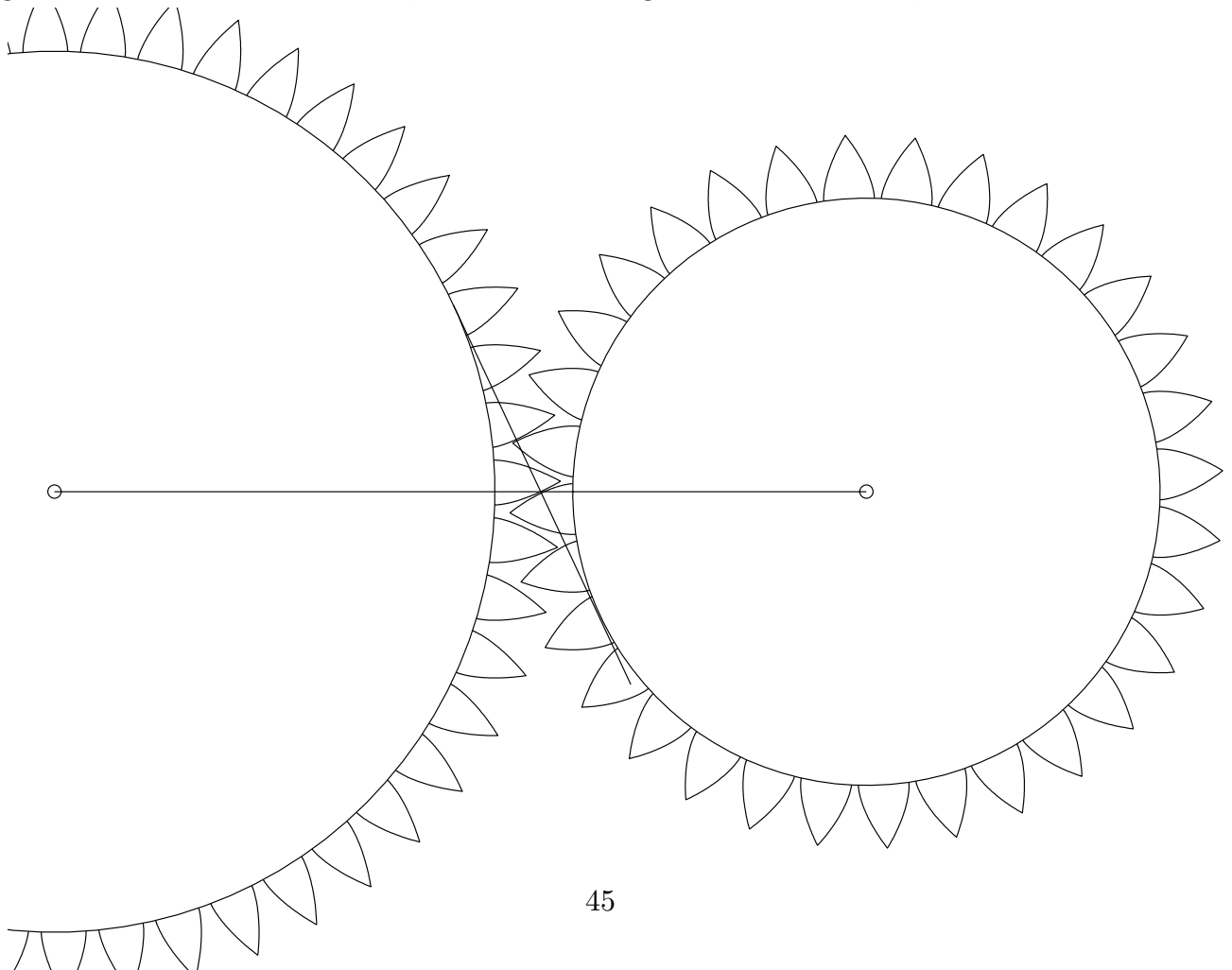
$106^\circ = \pi \cdot 106/180$ , gern bezüglich der Standardbasis.

Sollte allein diese Frage Sie von Ihrem Irrtum heilen, so brauchen Sie diese Aufgabe nicht auszuführen, aber überlegen Sie wenigstens, wie Sie die Matrix finden könnten.

nennök nednif xirtaM eid eiS bad ,thcin hci ebualg hciltnegiE. Die Quaternionenantwort ist dagegen kurz und völlig explizit  $q := \cos 53^\circ \cdot \mathbf{1} + \sin 53^\circ \cdot (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})/\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$  und  $\text{Dreh}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = q \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot q^{-1}$ .



**Zahnräder, deren Flanken Kreisevolventen sind.** Der Schnittpunkt zwischen der Verbindung der Mittelpunkte und der Normalen der (parallelen) Zahnflanken heißt **Wälzpunkt**. Die Parallelflanken rücken so schnell vor wie auf dem Zahnkreis, wo sie senkrecht aufsetzen. Daher ist das Übersetzungsverhältnis **konstant**. — Die Zähne müssen kleiner sein als oben, damit der folgende Zahn schon Kontakt hat, wenn der vorhergehende herausdreht, wie im Bild unten.



## 29.1.02

Die letzte Rechnung vom 24.1. besagt, daß die Bilder auf Blatt 13 die Umkehrung des Abwickelns zeigen. Betrachtet man daher zu einer Kurve  $c(t)$  die Kurve  $m(t)$  ihrer Krümmungsmittelpunkte, genannt *Evolute*, so erwarten wir, nachrechnen zu können, daß die Differenz zweier Krümmungsradien von  $c()$  gleich der Bogenlänge zwischen den entsprechenden Punkten von  $m()$  ist. Dies erklärt eine auffällige Eigenschaft der Bilder: Für Kurvenbögen mit  $\kappa' \neq 0$  sind die Krümmungskreise in einander enthalten, sie schneiden sich nicht. In der Tat:

Wegen  $n'(s) = \kappa(s) \cdot c'(s)$  folgt aus  $m(s) := c(s) - n(s)/\kappa(s)$ :

$$m'(s) = c'(s) - c'(s) + n(s) \cdot (1/\kappa)'(s) = n(s) \cdot (1/\kappa)'(s).$$

Daher sind erstens die Normalen von  $c$  Tangenten der Evolute und zweitens ist

$\int_{s_1}^s |m'(s)| ds = 1/\kappa|_{s_1}^s$ , also ist wie behauptet die Bogenlängenfunktion der Evolute Differenz entsprechender Krümmungsradien von  $c$ . Dies zeigt noch einmal: Die Evoluten-Konstruktion ist Umkehrung der Evolventen-Konstruktion.

Beispiele von geometrischen Konstruktionen, die man auf der 2-Sphäre ebenso machen kann wie in der Euklidischen Ebene:

Dreiecksformeln und Schnittpunktsätze, Definition sphärischer Ellipsen (und Bericht über das Hochsee Navigationssystem LORAN), diese sind gleichzeitig sphärische Hyperbeln, Punkte und Tangenten lassen sich mit der Leitkreiskonstruktion wie in der Euklidischen Ebene finden. Evolventen können mit Großkreistangenten in  $\mathbb{S}^2$  definiert werden. Aber daß das abgewinkelte Stück der Krümmungsradius auch der *sphärischen* Evolvente ist, können wir nicht einsehen, weil wir noch keine Definition der Krümmung sphärischer Kurven haben.

Wir suchen daher bei Euklidischen Kurven nach weiteren Eigenschaften, die sich zur Definition der Krümmung eignen, und betrachten *Parallelkurven*

$$c_\epsilon(s) := c(s) + \epsilon \cdot n(s), \quad c'_\epsilon(s) := c'(s) + \epsilon \cdot n'(s) = (1 + \epsilon\kappa(s))c'(s).$$

Tangenten und Normalen der Parallelkurven sind also parallel zu den Tangenten und Normalen von  $c$ . Daher können wir aus  $n_\epsilon(s) = n(s)$  die Krümmungen der Parallelkurven berechnen:

$$n'_\epsilon(s) = n'(s) = \kappa \cdot c'(s) = (\kappa(s)/(1 + \epsilon\kappa(s))) \cdot c'_\epsilon(s), \quad 1/\kappa_\epsilon(s) = 1/\kappa(s) + \epsilon.$$

Krümmungsradien von Parallelkurven verhalten sich also, wie wir es von Kreisen und von (parallelen!) Evolventen derselben Kurve schon kennen. Außerdem beobachten wir

$$\frac{d}{d\epsilon} |c'_\epsilon(s)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} (1 + \epsilon\kappa(s))|_{\epsilon=0} = \kappa(s).$$

Sind wir bereit, diese Formel als Definition anzusehen, so können wir diese neue Definition auch auf  $\mathbb{S}^2$  benutzen:

Gegeben sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte sphärische Kurve  $c$ . Für sie gilt also  $|c| = 1, c \perp c', |c'| = 1$ . Außerdem ist  $n := c' \times c$  tangential an  $\mathbb{S}^2$  und senkrecht zur Kurve. Daher können wir Parallelkurven hinschreiben:

$$c_\epsilon(s) := \cos \epsilon \cdot c(s) + \sin \epsilon \cdot n(s), \quad c'_\epsilon(s) := \cos \epsilon \cdot c'(s) + \sin \epsilon \cdot n'(s),$$

$$|c'_\epsilon(s)| = \sqrt{\cos^2 \epsilon + 2 \sin \epsilon \cos \epsilon \langle c', n' \rangle + \sin^2 \epsilon |n'(s)|^2}, \quad \frac{d}{d\epsilon} |c'_\epsilon(s)|_{\epsilon=0} = \langle c', n' \rangle =: \kappa_g(s).$$

Die neue Definition führt also zu einer berechenbaren Formel. Obwohl die Formel zunächst aussieht wie im Euklidischen, finden wir als Krümmung eines Kreises vom Radius  $r$  auf der Einheitssphäre:  $\kappa_g(r) = \cot r$  (mit plausiblen Werten bei  $r = \pi/2$  und  $r \sim \pi$ ).

### 31.1.02

Wiederholung der letzten Diskussion. Dann sphärische Kreise mit  $|c'| = 1$ :

$$c(s) := (\sin r \cos(s/\sin r), \sin r \sin(s/\sin r), \cos r),$$

$$c'(s) = (-\sin(s/\sin r), \cos(s/\sin r), 0),$$

$$n(s) = (\cos r \cos(s/\sin r), \cos r \sin(s/\sin r), -\sin r), \quad n'(s) = \cot r \cdot c'(s), \quad \kappa_g = \cot r.$$

Insbesondere sind *kürzeste Verbindungen*, also Großkreise, sphärische Kreise vom Radius  $\pi/2$ , wie in der Euklidischen Ebene *ungekrümmt*.

Da für jede sphärische Kurve  $n'$  senkrecht zu  $c, n$  steht, also proportional zu  $c'$  ist, folgt aus der Kettenregel auch für andere Parametrisierungen  $s = s(t)$ ,  $\tilde{c}(t) := c(s(t))$  die nützliche Formel zur Berechnung sphärischer Krümmungen:  $\tilde{n}'(t) = \tilde{\kappa}_g(t) \cdot \tilde{c}'(t)$ .

Diese sphärische Kurvenkrümmung bestimmt (zu Anfangswerten  $c(0), c'(0)$ ) mit Hilfe der *Frenet-schen Differentialgleichung* die Kurve  $c$  eindeutig. Da für jedes Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , jede zugehörige Orthonormalbasis  $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$  und jedes  $v \in V^d$  gilt:  $v = \sum_{k=1}^d \langle v, e_k \rangle \cdot e_k$ , so können wir die Ableitungen der Orthonormalbasis  $\{n(s), c'(s), c(s)\}$  wieder in dieser Basis darstellen. Alle benötigten Skalarprodukte, z.B.

$\langle n', n \rangle = 0$ ,  $\langle n', c' \rangle = \kappa_g$ ,  $\langle n', c \rangle = -\langle n, c' \rangle = 0$ , können wir berechnen, falls  $\kappa_g$  bekannt ist. Wir erhalten die sphärische

$$\text{Frenet Gleichung:} \quad \begin{pmatrix} n \\ c' \\ c \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & 0 \\ -\kappa_g & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ c' \\ c \end{pmatrix}.$$

Wie in 14.3 haben wir einen Eindeutigkeitsatz für solche Differentialgleichungen, so daß in der Tat sphärische Kurven durch ihre Krümmungsfunktion bestimmt sind. (Den entsprechenden Existenzsatz habe ich nicht besprochen.)

Als letzte Plausibilitätskontrolle der neuen Krümmungsdefinition stellen wir fest, daß auch die Beziehung zwischen sphärischen Evolventen und Evoluten dieselbe ist wie in der Euklidischen Ebene.

Gegeben sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte sphärische Kurve  $c(s)$ ,  $|c'(s)| = 1$ , mit äußerer Normale  $n(s)$ . Der in  $c(s)$  beginnende Großkreis in Richtung  $c'(s)$  ist

$$r \mapsto Gk(r) := \cos r \cdot c(s) + \sin r \cdot c'(s).$$

Die Evolvente, die  $c$  bei  $s = s_1$  trifft, erhalten wir, wenn auf diesem Großkreis das Stück  $(s_1 - s)$  abgetragen wird, also  $r = s_1 - s$  gesetzt wird:

$$s \mapsto E_c(s) := \cos(s_1 - s) \cdot c(s) + \sin(s_1 - s) \cdot c'(s).$$

Berechne

$$E'_c(s) := \sin(s_1 - s) \cdot c(s) - \cos(s_1 - s) \cdot c'(s) + \cos(s_1 - s) \cdot c'(s) + \sin(s_1 - s) \cdot c''(s),$$

und vereinfache mit der Frenetgleichung  $c'' = -\kappa_g \cdot n - 1 \cdot c$  zu

$$E'_c(s) := -\sin(s_1 - s) \cdot \kappa_g(s) \cdot n(s).$$

Die Ebene des Großkreise  $Gk$  wird von  $c(s), c'(s)$  aufgespannt, zu denen die äußere Normale  $n(s)$  senkrecht ist. Daher kann man leichter die äußere Normale  $N(s)$  der Evolvente angeben als deren zweite Ableitung berechnen (lernen Sie auch aus den Fehlern von anderen!):

$$N(s) = -\sin(s_1 - s) \cdot c(s) + \cos(s_1 - s) \cdot c'(s).$$

Beim Differenzieren fallen wieder die Terme mit  $c'$  (und später die mit  $c$ ) weg:

$$N'(s) = \cos(s_1 - s) \cdot (c(s) + c''(s)) = -\cos(s_1 - s) \cdot \kappa_g(s) \cdot n(s) = \cot(s_1 - s) \cdot E'_c(s).$$

Beachte, daß  $s$  *nicht* Bogenlänge der Evolvente ist, daß die letzte Gleichung aber trotzdem deren Krümmung liefert,  $\kappa_g(s) = \cot(s_1 - s)$ . Damit ist  $(s_1 - s)$ , wie aus der Euklidischen Ebene erwartet, der Krümmungsradius der Evolvente (Erinnerung: wir haben für sphärische Kreise vom Radius  $r$  die Krümmung  $\kappa_g = \cot r$  berechnet).

### 5.2.02

Wiederholung der Quaternionen an Hand der Aufgaben 7.3, 8.4, 9.3, 14.4. Besonders ausführlich mußte diskutiert werden, daß  $\text{Im}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$  ein *invarianter Unterraum* für die Abbildung  $L_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $L_q(x) := q \cdot x \cdot q^{-1}$  ist, nämlich: Weil  $L_q$  linear und abstandstreu, also orthogonal, ist und weil  $L_q$  die erste Koordinatenachse  $\mathbf{1} \cdot \mathbb{R}$  als invarianten Unterraum hat, gilt auch für das orthogonale Komplement  $L_q : \text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H})$ .

Eine *Drehung* des  $\mathbb{R}^3$  erkennt man daran, daß sie eine Drehachse hat, also einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Den Drehwinkel  $\theta$  findet man, indem man einen Einheitsvektor  $w$  senkrecht zur Drehachse abbildet, dann ist  $\cos \theta = \langle w, L_q(w) \rangle$ . Das läßt sich in 8.4e) einfach ausrechnen,  $\mathbf{i}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 und  $\mathbf{j}$  ist senkrecht zu dieser Drehachse. Für 9.3 benötigt man 8.4d), nämlich, daß für imaginäre Quaternionen  $v \perp w \in \text{Im}(\mathbb{H})$  aus dem Pythagoras  $|v|^2 + |w|^2 = |v+w|^2$  folgt  $v \cdot w = -w \cdot v$ . Und ähnlich  $v \cdot w \perp w$ . Für  $q := \mathbf{1} \cdot \cos \alpha + v \cdot \sin \alpha$  hat daher  $L_q$  die Drehachse  $v \cdot \mathbb{R}$  und den Drehwinkel  $2\alpha$ . Das beantwortet 14.4, letzte Zeile.

Kommentar zu Kurven in  $\mathbb{R}^3$ . Krümmungskreise findet man mit Aufgabe 12.3. Deren Ebene heißt *Schmiegebene* der Raumkurve. Im  $\mathbb{R}^3$  kann man diese Ebene von beiden Seiten ansehen, also nicht zwischen links bzw. rechts umlaufenden Kreisen unterscheiden, d.h. Krümmungen müssen ohne Vorzeichen definiert werden,  $\kappa(s) := |c''(s)|$ . Als nächstes werden die orthonormalen Vektoren  $c'$ ,  $\mathcal{H} := c''/|c''|$  durch die sogenannte Binormale  $\mathcal{B} := c' \times \mathcal{H}$  zu einer Orthonormalbasis längs der Kurve ergänzt. Ebenso wie für sphärische Kurven wird jetzt die Ableitung dieser drei Vektoren als Linearkombination von diesen geschrieben. Man findet die

$$\text{Frenet Gleichung für Raumkurven: } \begin{pmatrix} c' \\ \mathcal{H} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & 0 \\ -\kappa_g & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ \mathcal{H} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist die Torsion  $\tau$  definiert als die Rotationsgeschwindigkeit der Schmiegebene (oder ihrer Normale  $\mathcal{B}$ ),  $\tau := \langle \mathcal{H}', \mathcal{B} \rangle = -\langle \mathcal{H}, \mathcal{B}' \rangle$ .

Umgekehrt folgt aus 14.3, daß es zu gegebener (stetiger) Krümmung und Torsion (und gewählten Anfangsdaten) höchstens eine Raumkurve geben kann. Diesen Eindeigkeitssatz für Differentialgleichungen sollten Sie als einfache Differentiationsübung in Erinnerung behalten.

### 7.2.02

Wie findet man Drehmatrizen wie in 14.4? Sei  $D_v$  die  $180^\circ$  Drehung, die den Einheitsvektor  $v$  in den Basisvektor  $e_3$  dreht. Bezeichnet  $w := (e_3 + v)/|e_3 + v|$  die Winkelhalbierende zwischen  $e_3, v$ , so ist  $D_v(x) = -x + 2\langle x, w \rangle w$ , Eigenräume  $E_{+1} = w \cdot \mathbb{R}$ ,  $E_{-1} = w^\perp$ . Bezeichnet  $D_3(\alpha)$  die Drehung mit Achse  $e_3$  und Drehwinkel  $\alpha$ , so ist  $D_v \circ D_3(\alpha) \circ D_v$  die Drehung mit Achse  $v$  und Drehwinkel  $\alpha$ .

Damit Sie die Argumente noch einmal neu überdenken und damit Sie eine weitere wichtige zweidimensionale Geometrie kennen lernen, habe ich die *hyperbolische Geometrie* völlig parallel zur sphärischen Geometrie besprochen:



Wegen der unerwarteten Schwierigkeiten schicke ich die binomische Formel, auch 'Polarisierungsidentität' genannt, voraus: Für jede bilineare und symmetrische Abbildung zwischen Vektorräumen  $B : V \times V \rightarrow W$ ,  $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$ ,  $B$  bilinear, gilt:

$$B(v_1 + v_2, v_1 + v_2) - B(v_1, v_1) - B(v_2, v_2) = 2 \cdot B(v_1, v_2).$$

Von der Zahlentheorie bis zur Relativitätstheorie sind auch indefinite quadratische Funktionen wie  $x^2 + y^2 - z^2$  wichtig. Die Polarisierungsidentität liefert zu jeder quadratischen Funktion eine symmetrische Bilinearform, im vorliegenden Beispiel zu Ehren des Physikers Lorentz genannt *Lorentz Form* oder ausführlicher *Lorentz Skalarprodukt*:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle^L := xa + yb - zc, \quad \langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle^L = x^2 + y^2 - z^2.$$

Das Hyperboloid  $\{(x, y, z); x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$  verhält sich bezüglich der Lorentz Form als eine fast ebenso gute Einheitssphäre wie wir es aus dem Euklidischen Fall ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) kennen. Erstens sind die Lorentz-orthogonalen Abbildungen, d.h. die linearen Abbildungen  $A$  mit  $\langle Av, Aw \rangle^L = \langle v, w \rangle^L$  transitiv auf dem Hyperboloid. Wegen der Rotationssymmetrie des Hyperboloids genügt es, dazu zu zeigen, daß die linearen Abbildungen  $L_r$  mit den Matrizen (bez. der Standard Basis)

$$(L_r) = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix},$$

die offensichtlich den 'Nordpol'  $(0, 0, 1)$  in einen beliebigen Punkt  $(\sinh r, 0, \cosh r)$  des Meridians in der x-z-Ebene bewegen, tatsächlich solche Lorentz orthogonalen Abbildungen sind. Wegen der (Polarisierungsidentität genannten) binomischen Formel genügt es,  $\langle L_r(v), L_r(v) \rangle^L = \langle v, v \rangle^L$  nachzurechnen.

Mit  $v = (x, y, z)$  ist  $L_r(v) = (x \cosh r + z \sinh r, y, x \sinh r + z \cosh r)$ . Daher ist das Lorentz Quadrat  $x^2(\cosh^2 r - \sinh^2 r) + y^2 - z^2(\cosh^2 r - \sinh^2 r)$  in der Tat gleich  $x^2 + y^2 - z^2$ . Insbesondere wird natürlich das Hyperboloid auf sich abgebildet.

Zweitens sind, wie auf  $\mathbb{S}^2$ , die Meridiane kürzeste Verbindungen mit dem Nordpol. Dazu beschreiben wir (wieder!) Kurven in (jetzt hyperbolischen) Polarkoordinaten:

$$c(t) := (\sinh r(t) \cos \phi(t), \sinh r(t) \sin \phi(t), \cosh r(t)), \quad (\text{prüfe } \langle c(t), c(t) \rangle^L = -1).$$

$$\text{Differenziere und berechne } \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^L = \dot{r}(t)^2 + \sinh^2 r(t) \dot{\phi}(t)^2.$$

Dies ist nicht nur der sphärischen Rechnung sehr ähnlich, wir merken auch von dem negativen Vorzeichen in der Lorentz Form nichts mehr, alle von null verschiedenen Tangentialvektoren von Kurven haben ein *positives* Lorentz Quadrat. Daher können wir die Lorentzlänge von Kurven definieren durch

$$\text{Länge}_L(c|_{t_0}^{t_1}) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}(t)^2 + \sinh^2 r(t) \dot{\phi}(t)^2} dt.$$

Wie im sphärischen Fall ist diese Länge  $\geq \int_{t_0}^{t_1} \dot{r}(t) dt = r_1 - r_0$ . Insbesondere sind die Meridiane mit der Bogenlänge  $r$  parametrisiert und andere Verbindungskurven sind mindestens so lang wie die Differenz dieser 'Radien'.

Offenbar liegen die Meridiane in zweidimensionalen Ebenen durch den Mittelpunkt des Hyperboloids. Lorentz Isometrien respektieren beide Eigenschaften, kürzeste Verbindung zu sein und in einer Ebene durch den Mittelpunkt zu liegen. Daher sind, wie auf  $\mathbb{S}^2$ , alle ebenen Schnitte durch den Mittelpunkt kürzeste Verbindungen.

Drittens entwickelt sich die Dreiecksgeometrie (die Ecken  $A, B, C$  werden durch Kürzeste der Längen  $a, b, c$  verbunden) wie im sphärischen Fall. Wir legen die erste Ecke in den Nordpol,  $A = (0, 0, 1)$ , die zweite drehen wir um die  $z$ -Achse auf den Meridian  $y = 0$ ,  $B = (\sinh c, 0, \cosh c)$ . Danach beschreiben wir den dritten durch den 'Abstand'  $b$  von  $A$  und durch den Winkel  $\alpha$ , um den der Punkt aus der Ebene  $y = 0$  herausgedreht ist:

$$C = (\sinh b \cos \alpha, \sinh b \sin \alpha, \cosh b).$$

Dann bestimmen wir die Lorentz Spiegelung  $Sp$ , die  $A, B$  vertauscht:

$$(Sp) = \begin{pmatrix} -\cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix}.$$

Wie im sphärischen Fall können wir einerseits  $Sp \cdot C$  ausrechnen, andererseits diesen Bildpunkt durch seinen Abstand  $a$  vom neuen Nordpol  $B$  sowie den neuen Drehwinkel  $\beta$  gegen die  $x$ - $z$ -Ebene beschreiben:

$$\begin{pmatrix} -\cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sinh b \cos \alpha \\ \sinh b \sin \alpha \\ \cosh b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh a \cos \beta \\ \sinh a \sin \beta \\ \cosh a \end{pmatrix}.$$

Das Resultat sind Dreiecksformeln, die (einschließlich der Euklidischen Grenzwerte) völlig analog zum sphärischen Fall sind.

### 12.2.02

Computer-Demo: Rollkurven, Krümmungskreise, Platonische und halbbreguläre Polyeder, Raumkurven mit Röhren oder Frenet-Basen, Dandelin's Kugeln und andere Flächen, Stereographische Bilder aus  $\mathbb{S}^3$ . Teilweise als Stereo-Projektionen.

### 14.2.02

Beantwortung von Fragen. Neben vielen kurzen Fragen nahm die stereographische Projektion viel Raum ein. Rückblickend, scheint mir, war der Kern der Schwierigkeit, daß man sich jede stereographische Zeichnung mit zwei Beschriftungen vorstellen muß. Erstens liegt ein (2-dim) stereographisches Bild in der Euklidischen Ebene, so daß Strecken, Abstände, Winkel, Kreise eine Euklidische Bedeutung haben. Zweitens soll das Bild aber eine Karte der 2-Sphäre sein, so daß man für alles, was man Euklidisch "sieht", eine sphärische Interpretation haben muß. Z.B. geht es bei Aufg. 9.1b) im Kern darum, daß ein Kreis (bzw eine 2-Sphäre) vom Euklidischen Radius  $R$  um den Mittelpunkt der Karte (wegen der Rotationssymmetrie der stereographischen Projektion) das Bild eines Breitenkreises (einer Breiten-2-sphäre) vom Radius  $r$  um den Nordpol ist. Wie hängen diese beiden Radien zusammen? Wir haben mit dem Umfangswinkelsatz hergeleitet  $R = 2 \tan(r/2)$  (bzw.  $R = \tan(r/2)$ ). Analog haben wir mit den Abbildungsformeln  $(x, \dots, z, w) \mapsto \frac{1}{w+1}(x, \dots, z)$  und mit der Beschreibung von Breitenkreisen  $(\sin r \cos \phi, \sin r \sin \phi, \cos r)$  auch ausgerechnet, daß die Bildpunkte (unter stereographischer Projektion) auf einem Kreis vom Radius  $R = \tan(r/2)$  liegen. In 9.1b) sollte dies benutzt werden, um zu sagen: Die Ecken eines sphärischen Oktaeders vom Umkugelradius  $r$  (und Mittelpunkt im Nordpol) wird durch stereographische Projektion auf ein Euklidisches Oktaeder mit Umkugelradius  $R = \tan(r/2)$  (und Mittelpunkt 0) abgebildet.