Differentialgeometrie I

Aufgabe 12 (Wiederholungen zur Flächentheorie)

Die Kommentare zur Flächentheorie, die mich erreicht haben, waren sehr zurückhaltend. Deshalb wollen wir an zwei Beispielen die Definitionen noch einmal durchgehen. Betrachte die folgenden zwei Abbildungen:

$K, W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Katenoid: $$K(u,v) := \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

Wendelfläche: $$W(u,v) := \begin{pmatrix} \sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ v \end{pmatrix}.$$

(a) Die Ausgangsdaten.
Geben Sie die ersten Ableitungen beider Abbildungen an und verifizieren Sie, daß diese überall Rang 2 haben, so daß K, W parametrisierte Flächen definieren. Zeige, daß es sich um die Nullniveaus der Funktionen

$$k, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad k(x,y,z) := x^2 + y^2 - \cosh^2 z, \quad w(x,y,z) := x \cos z - y \sin z$$

handelt und daß $\operatorname{grad} k$ bzw $\operatorname{grad} w$ auf diesen Niveaus nicht verschwinden, also die beiden Flächen auch als Niveauflächen beschrieben sind.
Berechne parametrisierte Einheitsnormalen $N_K, N_W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$. (Sie finden $N_K = N_W$.)

(b) Erste und zweite Fundamentalformen oder **Metrik und Krümmung.**
Berechne für jede Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (u(t), v(t))$ die Metrik oder erste Fundamentalform $g(\dot c(t), \dot c(t)) := \langle \frac{d}{dt} F \circ c(t), \frac{d}{dt} F \circ c(t) \rangle$ with $F = K, W$ und die Normalkrümmung oder zweite Fundamentalform $b(\dot c(t), \dot c(t)) := \langle \frac{d}{dt} N \circ c(t), \frac{d}{dt} F \circ c(t) \rangle$, wieder mit $F = K, W$.
Bilinearisieren Sie diese quadratischen Formeln zu $g(X,Y)$ und $b(X,Y)$, $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$. (Kontrolle: Die Metrik g ist für beide Flächen gleich, die Krümmung b nicht.)
Bestimmen Sie die Weingartenabbildung S aus der Definition $g(SX, Y) = b(X,Y)$. Berechnen Sie Spur und Determinante von S.

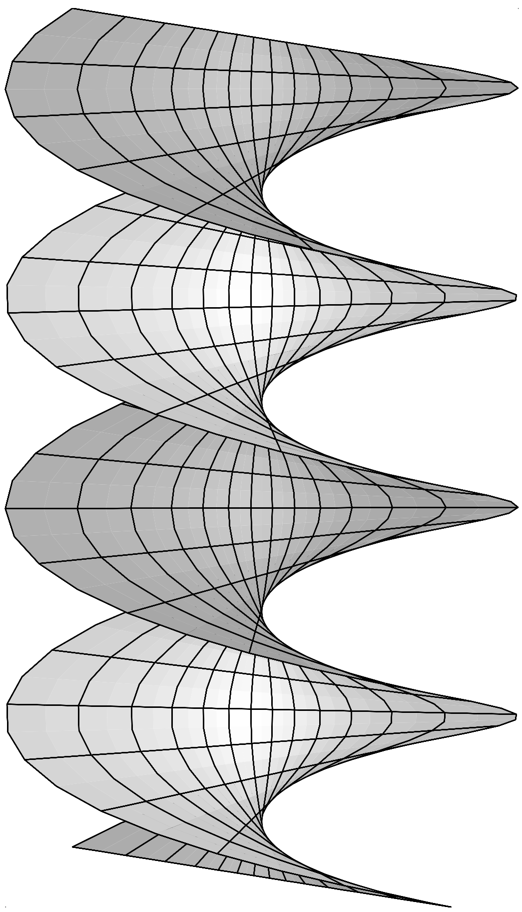
(c) Geodätische Linien.
Geodätische Linien sind Kandidaten für kürzeste Verbindungen, sie sind definiert als Kurven auf der Fläche, deren Beschleunigung überall senkrecht zur Fläche ist. Geben Sie für beide Flächen die Differentialgleichung der Geodätischen an, erstens unter Benutzung der Niveaufunktionen als Dgl für Kurven $C : I \to \mathbb{R}^3$, zweitens als Differentialgleichung für Kurven $c : I \to \mathbb{R}^2$ im Definitionsbereich der Parametrisierung. Im ersten Fall ist zu verifizieren, daß die Lösungskurven, die tangential an ein Niveau beginnen, ganz auf diesem verlaufen. Im zweiten Fall ist die Christoffelabbildung Γ zu bestimmen, hier einfacher aus der (gemeinsamen) Metrik g als aus $TF \circ \Gamma = (T^2 F)^{tang}$.

(d) Parallelkurven.
Betrachte auf den Flächen eine Kurve $C : I \to \mathbb{R}^3$, $C = F \circ c$ oder $f \circ C = 0$, $F = K, W$ oder $f = k, w$. Weiter sei $n(t) = TF|_{c(t)}(\eta(t)) \perp \operatorname{grad} f|_{C(t)}$ ein Einheitsvektorfeld

tangential an die Fläche, aber senkrecht zu der Kurve C. Schließlich seien $\epsilon \mapsto C(\epsilon, t)$ die Geodätischen mit Anfangswert $C(t)$ und Anfangsableitung $n(t)$. Die Kurven $t \mapsto C(\epsilon, t)$ heißen Parallelkurven zu C im Abstand ϵ. $n(\epsilon, t) := \frac{d}{d\epsilon} C(\epsilon, t)$.
Bestimmen Sie in beiden Beispielen die Parallelkurven zur v-Achse: $v \mapsto (0, v) \in \mathbb{R}^2$. Um was für Kurven auf den Flächen handelt es sich?
Berechnen Sie die geodätische Krümmung dieser Parallelkurven aus der Definition

$$\kappa_g(t; \epsilon) := \Big(\frac{d}{d\epsilon} |\dot{C}(\epsilon, t)|\Big) / |\dot{C}(\epsilon, t)| = \frac{\langle \dot{C}(\epsilon, t), \dot{n}(\epsilon, t)\rangle}{\langle \dot{C}(\epsilon, t), \dot{C}(\epsilon, t)\rangle}.$$

(e) Versuch, die Fläche aus g, b zu rekonstruieren.
Es seien g, b wie in beiden Beispielen im Definitionsbereich einer Parametrisierung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben und $c : I \to \mathbb{R}^2$ sei eine mit der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Definiere die Raumkurve $C := F \circ c$ und benutze das Basenfeld $\{\dot{C}(t), N \circ c(t), \dot{C}(t) \times N \circ c(t)\}$ längs C, um eine nicht(!) von F sondern nur von g, b abhängige Differentialgleichung für C anzugeben, die ganz analog zur Frenettheorie ist, aber auch funktioniert, wenn C eine Gerade auf der Fläche ist.
Ankündigung: Wir werden noch sehen, daß man g, b nicht unabhängig von einander geben darf. Es müssen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein, diese werden meist als *Integrierbarkeitsbedingungen* zitiert. Die Änderung der geodätischen Krümmung in Parallelkurvenscharen, $\frac{d}{d\epsilon}\kappa_g(t; \epsilon)$, führt zwangsläufig zu diesen Bedingungen.



Minimale Wendelfläche. Beachten Sie die zwei Seiten.