Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 7.1 Implizite Funktionen und Polynome

Es sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ und $P(a,x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Ferner sei x_a eine einfache Nullstelle der Polynomfunktion $x \mapsto P(a,x)$.

(a) Folgern Sie $\frac{\partial}{\partial x} P(a,x)|_{x_a} \neq 0$. Folgern Sie weiter, daß in einer Umgebung $U(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine differenzierbare Abbildung $X : U \to \mathbb{R}$ existiert, so daß gilt $b \in U \Rightarrow P(b, X(b)) = 0$.

(b) Leiten Sie aus der **Annahme** $P(a + t \cdot v, c(t)) = 0$, $c(0) = x_a$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Kurve $c : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}$ her.
Zeigen Sie, daß die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind.
Zeigen Sie, daß man jetzt die Annahme vergessen kann, weil für **jede** Lösung $c(\ )$ der Differentialgleichung mit $c(0) = x_a$ gilt: $P(a + t \cdot v, c(t)) = 0$. Wie hängen die Lösungen dieser Differentialgleichungen (für verschiedene v) mit der Abbildung X aus (a) zusammen?

Aufgabe 7.2 Differentialformen und Determinanten

(a) Es seien $\omega \in \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Ferner sei $\left(L_i^j\right)_{i,j=1\dots k}$ eine Matrix, mit der wir neue Vektoren definieren: $w_i := \sum L_i^j v_j$. Zeigen Sie:

$$\omega(w_1, \dots, w_k) = \det(L_i^j)\omega(v_1, \dots, v_k).$$

Betrachten Sie dazu $\omega(w_1, \dots, w_k)$ als Funktion der Zeilenvektoren $L_i^{j=1\dots k}$ von (L_i^j).

(b) Nun sei $\omega \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$ eine Differentialform vom Grad k auf $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung. Zu der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_k\}$ bezeichnen wir die partiellen Ableitungen mit $\partial_i F = TF(e_i)$.
Schließlich betrachten wir mit einem Diffeomorphismus $M : X = \mathbb{R}^k \to Y = \mathbb{R}^k$, $y = M(x)$ die sogenannte Reparametrisierung $\tilde{F}(x) = F \circ M(x)$. Berechnen Sie zunächst die partiellen Ableitungen von $\tilde{F}$ mit der Kettenregel als Linearkombinationen der partiellen Ableitungen von F. Bezüglich der verwendeten Basen ist die Matrix von $TM|_x$ die Jacobimatrix $(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})$.
Zeigen Sie dann mit (a)

$$\omega(\partial_1 \tilde{F}, \dots, \partial_k \tilde{F})|_x = \det(TM|_x)\omega(\partial_1 F, \dots, \partial_k F)|_{M(x)}.$$

Aufgabe 7.3 Spezialfall des Transformationssatzes

Wir werden wieder einen Spezialfall des Transformationssatzes beweisen. Dazu betrachten wir eine stetig differenzierbare Funktion $f : W \to \mathbb{R}$, die auf dem Würfel $W = [a,b] \times [c,d]$ definiert ist. Wir wollen das Integral $\int_W f(x,y) d(x,y)$ mittels Substitution oder Reparametrisierung von f durch $f \circ m$ berechnen. Genauer wollen wir zeigen, daß sich der Wert des Integrals nicht ändert, wenn wir eine differenzierbare Schar von Substitutionen einsetzen.

Sei für $t \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $m_t : \widetilde{W} \to W$ gegeben, so daß die dadurch definierte Abbildung $m : \mathbb{R} \times \widetilde{W} \to W$, also $m(t,x,y) = m_t(x,y)$, stetig differenzierbar ist. Weiterhin gelte für jedes $a \le x \le b$ und $c \le y \le d$:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(t,a,y) = \frac{\partial}{\partial t} m(t,b,y) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} m(t,x,c) = \frac{\partial}{\partial t} m(t,x,d) = 0.$$

Das bedeutet, daß die Substitutionen m_t sich auf dem Rand von W nicht ändern, während t variiert.
Bei Substitutionsabbildungen m wird vorausgesetzt, daß Tm Höchstrang hat, außer auf Nullmengen. Hier sind also $v_1 = \frac{\partial}{\partial x} m$ und $v_2 = \frac{\partial}{\partial y} m$ linear unabhängig vorausgesetzt. Daher hat man für jeden Vektor v die Darstellung: $\det(v_1, v_2)v = \det(v, v_2)v_1 + \det(v_1, v)v_2$ (vgl die Kramersche Regel). Wußten Sie schon, wie nützlich das ist, auch n-dimensional?

(a) Zeigen Sie zunächst

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left((f \circ m_t)(x,y) \det(\frac{\partial}{\partial t} m, \frac{\partial}{\partial y} m)|_{(t,x,y)} \right) = 0,$$
$$\int_c^d \frac{\partial}{\partial y} \left((f \circ m_t)(x,y) \det(\frac{\partial}{\partial t} m, \frac{\partial}{\partial x} m)|_{(t,x,y)} \right) = 0.$$

(b) Beweisen Sie jetzt mit Hilfe von (a)

$$\frac{d}{dt} \left[\int_c^d \int_a^b (f \circ m_t)(x,y) \det(Tm_t|_{(x,y)})\, dx\, dy \right] = 0.$$

Aufgabe 7.4 Mehr Riemannsummen und Rotationssymmetrie

Wir verwenden die Funktion $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $r(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2}$; diese Funktion ist außerhalb der z-Achse (einer Nullmenge) stetig differenzierbar. Was ist ihr Gradient?
Außerdem verwenden wir eine stetige, monoton fallende Funktion $Z : [0,R] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, um einen Rotationskörper K zu beschreiben:

$$K = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;\ 0 \le r \le R, 0 \le z \le Z(r) \}.$$

Behauptung: $$\int_K f \circ r \ d(x,y,z) = \int_0^R 2\pi r Z(r) f(r) dr.$$

Das dreidimensionale Integral $\int_K f \circ r\ d(x,y,z)$ soll mit verallgemeinerten Riemannsummen so approximiert werden, daß Sie zeigen können, daß dieses Integral durch das eindimensionale Integral $\int_0^R 2\pi r Z(r) f(r) dr$ berechnet werden kann.
Verwenden Sie als Zerlegungsmengen für die Riemannsummen konzentrische Zylinderschalen $\{r_1 \le r \le r_2, 0 \le z \le Z(r)\}$, auf denen die Funktion $f \circ r$ fast konstant ist (falls $r_2 - r_1 \le \delta$). Beachten Sie, daß das Resultat noch allgemeiner als der Satz von Fubini aussieht, nämlich so, als hätten wir über die **Zylinder** $\{r = \mathit{const}\}$ zuerst integriert. Der Transformationssatz wird das in größerer Allgemeinheit rechtfertigen.

Berechnen Sie als Beispiel das Trägheitsmoment der Kugel und vergleichen Sie das Ergebnis mit 6.4(d).