Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 3.1 Gradient, implizite Funktionen und Extrema

Wir definieren folgende Funktionen:

$$f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 \text{ und } F(x,y,z) = f(x,y)^2 + z^2$$

(a) Geben Sie die Menge an, auf der der Gradient von F verschwindet. Zu welchen Niveaus von F gehört diese Menge?
(b) Suchen Sie sich ein Stück im Komplement dieser Ausnahmemenge und parametrisieren Sie es als Graph einer Funktion.
(c) Betrachten Sie die Niveaufläche $F(x,y,z) = \frac{1}{8}$. Welches Gleichungssystem muß man lösen, um die Funktion $l(x,y,z) = x + 2y + 3z$ zu maximieren? (Sie müssen dieses Gleichungssystem nicht lösen!) Wie viele Lösungen hat dies Gleichungssystem ungefähr? Was haben die Lösungen mit den Extremstellen zu tun?

Aufgabe 3.2 Taylor-Polynome

Wir betrachten noch einmal die Funktion F aus 3.1.
(a) Berechnen Sie das zweite Taylor-Polynom von F an einer beliebigen Stelle (a,b,c) zur Approximation von F an der Stelle $(a+u, b+v, c+w)$.
(b) Begründen Sie, daß das Taylor-Polynom ab einem gewissen Grad mit der Funktion übereinstimmt. Ab welchem?

Aufgabe 3.3 Alternierende 2-Formen

(a) Die Menge der alternierenden n-Formen $\mathrm{Alt}^n(k)$ über einem Körper k bilden einen k-Vektorraum. Berechnen Sie die Dimension von $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R})$.
Beispiele für k-Formen erhalten Sie, wenn Sie in die Determinante $n-k$ feste Vektoren $v_1, \dots, v_{n-k}$ einsetzen: $\omega(x_1, \dots, x_k) := \det(x_1, \dots, x_k, v_1, \dots, v_{n-k})$.
(b) Wir betrachten eine alternierende 2-Form $\omega = \sum_{j<k} \omega_{jk} dx_j \wedge dx_k$ und eine 1-Form $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_i$. Wir definieren ihr Dachprodukt $\lambda \wedge \omega$ durch die Formel

$$(\lambda \wedge \omega)(u,v,w) = \lambda(u)\omega(v,w) + \lambda(v)\omega(w,u) + \lambda(w)\omega(u,v).$$

Zeigen Sie, daß diese 3-Form alternierend ist. ("alternierend" ist gebräuchlicher als "schiefsymmetrisch".)
(c) Nehmen Sie an, daß ω selbst schon von der Form $\lambda_2 \wedge \lambda_3$ für zwei 1-Formen λ_2 und λ_3 ist. Zeigen Sie dann:

$$\lambda_1 \wedge (\lambda_2 \wedge \lambda_3) = (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \wedge \lambda_3$$

Aufgabe 3.4 Vektorfelder und 1-Formen

(a) Für ein Vektorfeld $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren wir eine 1-Form ω wie folgt:

$$\omega|_u(v) := < W(u), v >$$

Zeigen Sie die folgenden beiden Gleichungen:

$$T_u\omega(v) = < T_uW, v > = < TW \cdot u, v > \quad \text{(zwei Bezeichnungen für dasselbe)},$$

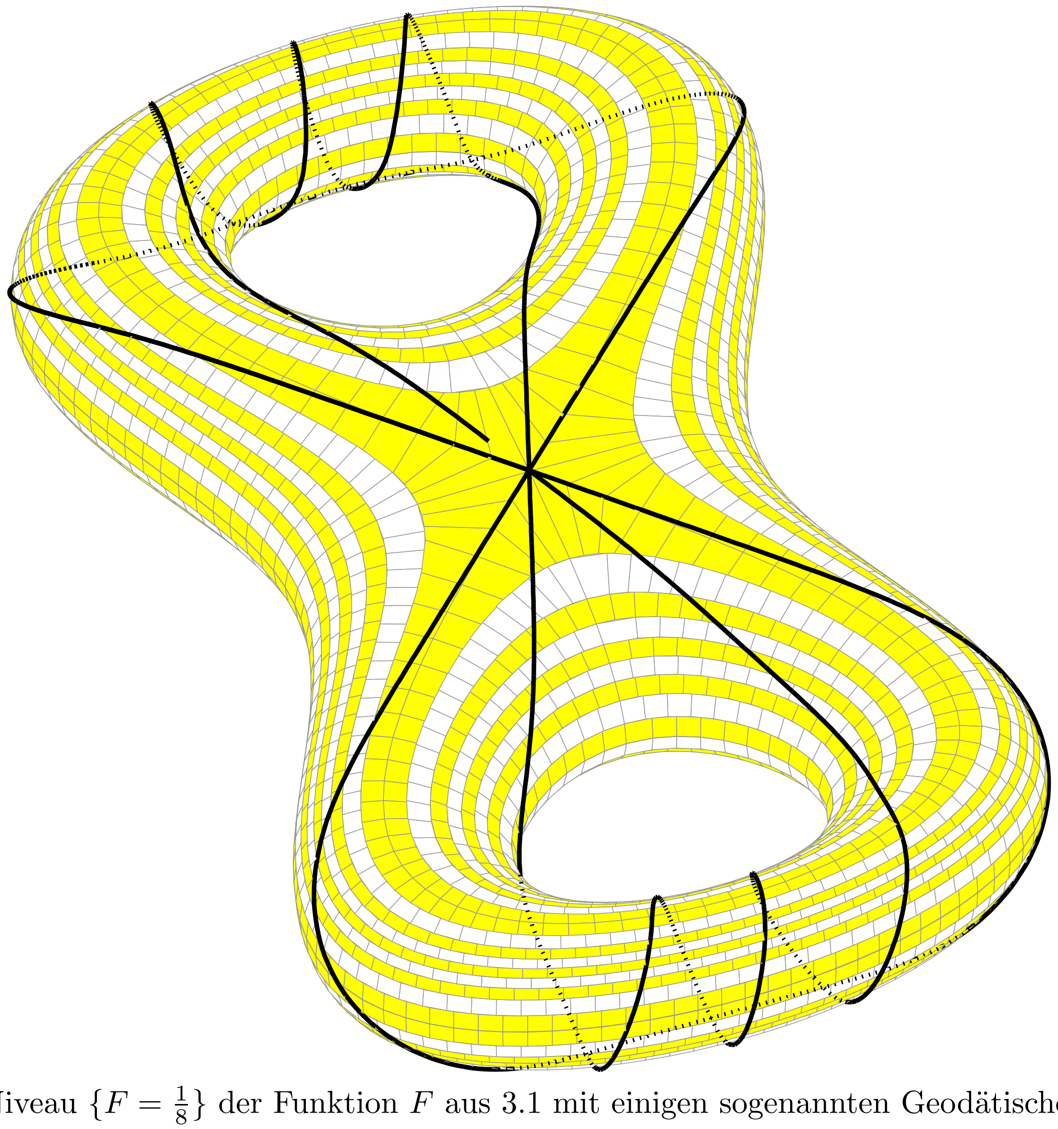
$$d\omega(u, v) = < TW \cdot u, v > - < TW \cdot v, u > = < TW \cdot u, v > - < TW^{tr} \cdot u, v >$$

(b) Zu einem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ definieren wir mit Hilfe des Kreuzproduktes eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Diese soll auch durch Multiplikation mit einer Matrix A beschrieben werden:

$$x \mapsto v \times x = A \cdot x$$

Bestimmen Sie die Matrix A.

(c) Nun sei n=3 und A die schiefsymmetrische Matrix $TW - TW^{tr}$ aus (a). Bestimmen Sie den zugehörigen Vektor v nach (b). Überprüfen Sie: $v = \mathrm{rot}W$.



Das Niveau $\{F = \frac{1}{8}\}$ der Funktion F aus 3.1 mit einigen sogenannten Geodätischen, $\ddot{c} \sim \operatorname{grad} F$.