Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 11.1 Zum Assoziativgesetz $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$

Für den Beweis des Assoziativgesetzes des Dachproduktes

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{r+s}) := \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in S^{r+s}} \operatorname{sign}(\tau) \cdot \omega(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(r)})\eta(v_{\tau(r+1)}, \ldots, v_{\tau(r+s)}).$$

mußten Sie arbeiten; danach arbeitet es für Sie:

(a) Es sei$\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$, $\langle\ \rangle$, und $\{dx_i\}$ sei die Dualbasis. Dann gilt für $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ (die Sie sich als Spaltenvektoren der folgenden Matrix vorstellen sollten):

$$\begin{aligned}\det(\ (\langle e_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n) &\overset{(1)}{=} (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(v_1, \ldots, v_n) \\ &\overset{(Ass-Ges)}{=} (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^r) \wedge (dx^{r+1} \wedge \ldots \wedge dx^{r+s})(v_1, \ldots, v_n) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in S^{r+s}} \operatorname{sign}(\tau) \cdot \det(\ (\langle e_i, v_{\tau j}\rangle)_{i,j=1}^r) \cdot \det(\ (\langle e_i, v_{\tau j}\rangle)_{i,j=r+1}^{r+s}).\end{aligned}$$

Begründen Sie (1) und (2) mit kurzem Text, ohne Rechnung. Überzeugen Sie sich, daß Sie damit den *Laplaceschen Entwicklungssatz* bewiesen haben, Entwicklung nach Unterdeterminanten.

(b) Warum gilt dies Resultat auch dann, wenn die w_i keine Orthonormalbasis bilden, also

$$\det(\ (\langle w_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in S^{r+s}} \operatorname{sign}(\tau) \cdot \det(\ (\langle w_i, v_{\tau j}\rangle)_{i,j=1}^r) \cdot \det(\ (\langle w_i, v_{\tau j}\rangle)_{i,j=r+1}^{r+s})?$$

Aufgabe 11.2 Integrierbarkeitskriterium (Königsberger 7.6 Satz 13)

Bereiten Sie den Beweis von Königsberger 7.6 Satz 13 zum **mündlichen Vortrag** in der Übungsgruppe vor.

Satz 13. $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt und N sei Nullmenge. f sei beschränkt auf K und auf $K \setminus N$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Versuchen Sie den Beweis zunächst ohne Nachzuschlagen zu führen.

Aufgabe 11.3 Auftrieb (Archimedes) und Divergenzsatz (Gauß)

> Ein eingetauchter Körper verliert in einer Flüssigkeit der Dichte ρ so viel an Gewicht – durch den Auftrieb – wie die von dem Körper verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Zunächst ist der Druck p in der Tiefe z (= Abstand von der Oberfläche der Flüssigkeit) gegeben durch $p = \rho z$. Die Oberfläche des Körpers werde beschrieben durch eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^3,\ \gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Wegen des Druckes ("Kraft pro Fläche") wird auf die Oberfläche des Körpers Kraft ausgeübt, an jeder Stelle senkrecht zur Oberfläche, und der Gesamtauftrieb A entsteht durch Integration (als Grenzwert von Riemannsummen vorstellen):

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \int_{I_1 \times I_2} \rho\gamma^3(s,t) \cdot (\frac{\partial}{\partial s}\gamma \times \frac{\partial}{\partial t}\gamma) ds \wedge dt, \qquad \text{wobei}$$

$(\frac{\partial}{\partial s}\gamma \times \frac{\partial}{\partial t}\gamma)$ senkrecht auf der Oberfläche des Körpers steht und

$\left|(\frac{\partial}{\partial s}\gamma \times \frac{\partial}{\partial t}\gamma)\right|$ der Flächeninhalt des Parallelogramms ist mit $\frac{\partial}{\partial s}\gamma,\ \frac{\partial}{\partial t}\gamma$ als Seitenvektoren.

Zeigen Sie: $A^1 = 0, A^2 = 0, A^3 = \rho \cdot Volumen$, indem Sie drei einfache Vektorfelder V_1, V_2, V_3 finden so daß gilt

$$A^j = \int\int \det(V_j, \frac{\partial}{\partial s}\gamma, \frac{\partial}{\partial t}\gamma) = \int\int \langle V_j, \frac{\partial}{\partial s}\gamma \times \frac{\partial}{\partial t}\gamma\rangle.$$

Der Gaußsche Divergenzsatz und $\operatorname{div} V_1 = \operatorname{div} V_2 = 0, \operatorname{div} V_3 = \rho$ liefern die Behauptung.

Aufgabe 11.4 Trojaner auf der Jupiterbahn (Linearisieren der Dgl)

(a) Die Newtonschen Gleichungen für drei sich anziehende Massenpunkte lauten

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1\left(m_2\frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3} + m_3\frac{x_3 - x_1}{|x_3 - x_1|^3}\right) \quad \text{und 1,2,3 zyklisch vertauscht.}$$

Verifizieren Sie die Lösungen von Lagrange: Die drei Massenpunkte bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge l) und rotieren um den Schwerpunkt $\sum m_j x_j / \sum m_j =: 0 \in \mathbb{R}^2$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega^2 := (m_1 + m_2 + m_3)/l^3$:

$$x_j(t) = U(t) \cdot x_j(0), \qquad U(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Im Grenzfall $m_1 \to 0$ spricht man von den beiden Lagrangepunkten des Zweikörpersystems. Berühmt sind die Lagrangepunkte des Sonne-Jupiter-Systems. Die Trümmer, die sich in der Nähe dieser Punkte bewegen, heißen *Trojaner*. Google-Suche: Trojaner, Jupiter

(b) Wir betrachten eine Schar von Lösungen nahe der Lagrangepunkte:

$$x_1(t,\alpha) = U(t) \cdot (y(t,\alpha) + x_1(0)), \qquad y(t,0) = 0.$$

Wir wollen die Newtonschen Gleichungen (mit $m_1 = 0$ in (a)) längs der Lagrangelösung linearisieren. Also, leiten Sie durch Differenzieren $\frac{d}{d\alpha}x_1(t,\alpha)|_{\alpha=0} =: U(t) \cdot \eta(t)$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für η her.
Tip: Benutze die konstanten (nicht orthogonalen) Einheitsvektoren

$$e_2 := U^{-1}(t)(x_2 - x_1)(t)/l,\ e_3 := U^{-1}(t)(x_3 - x_1)(t)/l,$$

weiter $\dot{U}(t) = \omega D^{90} U(t)$ mit $D^{90} = 90°$-Drehung, schließlich $\omega^2 l^3 = m_2 + m_3$.

Kontrolle: $\quad \ddot{\eta} + ?? \cdot D^{90}\dot{\eta} = ?? \cdot \langle e_2, \eta\rangle e_2 + ?? \cdot \langle e_3, \eta\rangle e_3, \qquad$ (Newton linearisiert).

Die Konstanten hängen von ω und m_3/m_2 ab.

(c) Um die Eigenfrequenzen für η zu bestimmen, wird das System z.B. mit Hilfe von $\zeta := \dot{\eta}$ als vierdimensionales System erster Ordnung geschrieben:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A finden Sie leichter, wenn Sie die Orthonormalbasis $f_1 := (e_2 - e_3)$, $f_2 := (e_2 + e_3)/\sqrt{3}$ verwenden. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
(Kontrolle:) $P(\lambda) = \lambda^4 + \omega^2\lambda^2 + \frac{27}{16}(1 - \mu^2)\omega^4$ liefern die gesuchten Eigenfrequenzen.
Da $\mu := (m_2 - m_3)/(m_2 + m_3)$ im Sonne-Jupiter-System nur knapp unter 1 ist, ist eine der beiden Frequenzen knapp unter ω, die andere nahe 0.
Jupiter hat eine Umlaufzeit von knapp 12 Jahren, sein Bahnradius ist gut 1000 mal so groß wie der Sonnenradius (700 000 km) und sein Gewicht ist (grob) 1/1000 des Gewichtes der Sonne. Er steht jetzt am Abend- und Nachthimmel.