Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Wir wünschen Ihnen schöne Festtage und alles Gute zum Jahreswechsel

Aufgabe 10.1 Mehr zur äußeren Ableitung.

(a) Es seien ω, η Differentialformen vom Grade r bzw. s. Natürlich(?) gilt für die Richtungsableitung des Dachproduktes die Produktregel $T_{v_0}(\omega \wedge \eta) = (T_{v_0}\omega) \wedge \eta + \omega \wedge T_{v_0}(\eta)$. Folgern Sie die Produktregel: $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$.
Bemühen Sie sich um einen kurzen Beweis.

(b) Es sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie eine $(n-1)$-Form durch $\omega|_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \det(X(p), v_1, \ldots, v_{n-1})$. Zeigen Sie

$$d\omega|_p(v_0, \ldots, v_{n-1}) := \operatorname{div}(X)|_p \det(v_0, \ldots, v_{n-1}).$$

Aufgabe 10.2 Zum Transformationssatz (Königsberger 9.4 Aufg.10)

Es sei $E := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ und $f : E \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Die Potenzreihenentwicklung sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

(a) Zeigen Sie $f : E \to f(E)$ ist ein Diffeomorphismus (Angenommen $f'(z_0) = 0 \ldots$).

(b) Zeigen Sie: $f(E) \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann meßbar (1_E ist integrierbar), wenn die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 < \infty$ erfüllt ist.
Hinweise: Warum gilt $|\det(Tf|_z)| = |f'(z)|^2$? Warum gilt $\int_E z^n \bar{z}^m = 0$ für $m \neq n$? Warum ergibt sich $vol_2(f(E)) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$?

Aufgabe 10.3 Zusammenfassung zu Differentialgleichungen II

Ich hoffe, Sie können die Behauptungen 9.3 benutzen, auch wenn die Beweise noch nicht besprochen sind.

(a) Bezeichnungen wie in 9.3 (d). Ziel: Differenzierbarkeit des Flußes nach den Anfangswerten. Vorarbeit: Lipschitz-Stetigkeit in 9.3 (b).
Es sei $A(t,p) \in M_{n\times n}$ Lösung der Differentialgleichung 9.3 (L), also

$$(L) \qquad \frac{\partial}{\partial t} A(t,p) = T_2X|_{(t,F(t,p))} \circ A(t,p),\ A(0,p) = \mathrm{id}.$$

Betrachten Sie die Differenz $h(t) := F(t, p+v) - F(t,p) - A(t,p)\cdot v,\ h(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Differenzieren Sie h, setzen Sie die Differentialgleichungen ein, denken Sie an die Lipschitzbedingung für X (aus der auch $\|T_2X\| \le L$ folgt), natürlich erlauben wir die Zusatzvoraussetzung $|v| \le \delta, \delta$ später zu wählen. Arbeiten Sie darauf hin, eine Differentialungleichung für h ähnlich wie in 9.3 (f) zu erhalten, aus der $|h(t)| \le \epsilon |v| e^{Lt}$ folgt. Damit haben Sie bewiesen, daß der Fluß F nach den Anfangswerten p differenzierbar ist und daß die Ableitung durch die Dgl (L) bestimmt ist. (Rufen Sie sich in Erinnerung, daß in allen bisherigen Differenzierbarkeitsbeweisen schon vorher klar war, was die Ableitung zu sein hätte.)

(b) Linearisieren beim kräftefreien Kreisel. (Dies sollte ohne ernsthafte Physikkenntnisse bearbeitbar sein, und der Allgemeinbildung dienen.)

Vorgeschichte. Wir nennen eine Bewegung von Punkten $p_i(t)$ mit den Massen m_i eine *Rotationsbewegung um 0*, falls es für jedes t einen Vektor $\omega(t)$ (genannt Winkelgeschwindigkeit) gibt, so daß für alle Punkte gilt: $\dot{p_i}(t) = \omega(t) \times p_i(t)$. Zu dieser Bewegung gehört die kinetische Energie (die im kräftefreien Fall nicht von t abhängt)

$$\begin{aligned} 2E(t) := \sum_i m_i \cdot \langle \dot{p_i}(t), \dot{p_i}(t) \rangle &= \sum_i m_i \cdot \langle \omega(t) \times p_i(t), \omega(t) \times p_i(t) \rangle \\ &= \sum_i m_i \cdot \det(\omega(t), p_i(t), \omega(t) \times p_i(t)) \\ &= \sum_i m_i \cdot \langle p_i(t) \times (\omega(t) \times p_i(t)), \omega(t) \rangle. \end{aligned}$$

Die hier auftretende Summe $D(t) := \sum_i m_i \cdot p_i(t) \times (\omega(t) \times p_i(t))$ heißt Gesamtdrehimpuls der Massenpunkte. Für eine kräftefreie Bewegung ist $\dot{D}(t) = 0$. Da D **linear** von ω abhängt, schreiben wir $D := \sum_i m_i \cdot p_i \times (\omega \times p_i) = \Theta \cdot \omega$. Aus den Umformungen zur Energie folgt $\langle \Theta \cdot \omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle \Theta \cdot \tilde{\omega}, \omega \rangle$. Als selbstadjungierte lineare Abbildung hat Θ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren. Zum Zeitpunkt t gilt

$$\Theta(t) \cdot e_j(t) = \lambda_j \cdot e_j(t), \qquad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Dieser **Trägheitstensor** Θ bildet Winkelgeschwindigkeiten auf Drehimpulse ab: $D = \Theta \cdot \omega$.

Aufgabe. Machen Sie in der zeitabhängigen Eigenbasis $\{e_j(t)\}$ des Trägheitstensors den

$$\mathit{Ansatz}: \ \omega(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t) e_j(t), \ \ D(t) = \Theta(t) \cdot \omega(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t) \lambda_j e_j(t), \ \ \dot{e_i}(t) = \omega(t) \times e_i(t).$$

(a) Folgern Sie aus der Kräftefreiheit $\frac{d}{dt} D(t) = 0$ die Kreiselgleichungen:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_2 \omega_3 \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2} \omega_3 \omega_1 \qquad \dot{\omega}_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3} \omega_1 \omega_2.$$

(b) Raten Sie drei spezielle Lösungen (die so genannten Hauptträgheitsrotationen), mit $\omega_i = \omega_j = 0, \ \omega_k = a_k = const.$

Linearisieren Sie die Kreiselgleichungen (wie in 9.3 (e) beschrieben) längs dieser drei speziellen Lösungen. Es ergeben sich (natürlich lineare) Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Setzen Sie $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ voraus und lösen Sie die linearisierten Gleichungen. Die Tatsache, daß die zu $\omega_2 \neq 0$ gehörige Gleichung *exponentiell wachsende Lösungen* besitzt, bedeutet, daß diese Hauptträgheitsrotation nicht stabil ist, daß jede Störung exponentiell wächst.

Die Erhaltungsgrößen $|D|^2 - 2\lambda_j E$ zeigen für $j = 1, 3$, daß die beiden anderen Hauptträgheitsrotationen stabil sind.